Ecuaciones Diferenciales

Tema 1 Conceptos básicos

1.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene una variable desconocida y sus derivadas.

Ejemplo 1.

Las siguientes son ecuaciones diferenciales que contienen la variable desconocida ***y***.

(1) $$\frac{dy}{dx} = 5x + 3$$

(2) $$e^y \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

(3) $$4\frac{d^3 y}{dx^3} + (sen\, x)\frac{d^2 y}{dx^2} + 5xy = 0$$

(4) $$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x$$

(5) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Una ecuación diferencial es una ecuación diferencial ordinaria si la variable desconocida depende solamente de una variable independiente. Si la variable desconocida depende de dos o más variables independientes, la ecuación diferencial es una ecuación diferencial parcial.

Ejemplo 2.

Las ecuaciones 1 – 4 son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias porque la variable desconocida *y* depende solamente de la variable *x*. La ecuación 5 es una ecuación diferencial parcial porque *y* depende tanto de la variable independiente *t* como de *x*.

1.2 Orden y grado

El *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

Ejemplo 3.

La ecuación 1 es una ecuación diferencial de primer orden, las ecuaciones 2, 4 y 5 son ecuaciones diferenciales de segundo orden. (Nótese que en la ecuación 4 la mayor derivada que aparece es de orden 2). La ecuación 3 es una ecuación diferencial de tercer orden.

El *grado* de una ecuación diferencial, que **puede escribirse como un polinomio** en la variable desconocida y sus derivadas, es la potencia a la cual está elevada su derivada de mayor orden.

Ejemplo 4.

La ecuación 4 es una ecuación diferencial de tercer grado porque su derivada de mayor orden, en este caso segundo, está elevada a la tercera potencia. Las ecuaciones 1 y 3 son ejemplos de ecuaciones diferenciales de primer grado.

No todas las ecuaciones pueden clasificarse por grado. Por ejemplo la ecuación 2 no tiene grado, puesto que **no puede escribirse como un polinomio** en la función desconocida y sus derivadas (a causa del término e^X).

1.3 Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* en la función desconocida *y*, y la variable independiente *x*, es lineal si tiene la forma:

(6) $$b_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + b_1(x)\frac{dy}{dx} + b_0(x)y = g(x)$$

Las funciones $bj(x)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ y $g(x)$ se suponen conocidas y dependen solamente de la variable *x*. Las ecuaciones diferenciales que no pueden escribirse en la forma (6) son no lineales.

Ejemplo 5.
La ecuación 1 es una ecuación lineal de primer orden, con $b_1(x) = 1$, $b_0(x) = 0$, y $g(x) = 5x + 3$.
La ecuación 3 es una ecuación lineal de tercer orden con $b_3(x) = 4$, $b_2(x) = sen\ x$, $b_1(x) = 0$, $b_0(x) = 5x$, y $g(x) = 0$.
Las ecuaciones 2 y 4 son no lineales.

1.4 Notación

Las expresiones y', y'', y''', $y^{(4)}$, …, $y^{(n)}$ se usan frecuentemente para representar respectivamente la primera, segunda, …, enésima derivada de ***y*** con respecto de la variable independiente en consideración. Por lo tanto y'' representa d^2y/dx^2 si la variable independiente es ***x***, pero representaría también d^2y/dp^2 si la variable independiente es ***p***. Si la variable independiente es el tiempo, generalmente representado por *t*, las primas se reemplazan por puntos.

Nota: el paréntesis en $y^{(n)}$ se usa para distinguirlo de la potencia enésima y^n.

Problemas resueltos

En los siguientes problemas, clasifique cada ecuación diferencial según su orden, grado (si existe) y si es lineal o no. Determine la función desconocida y la variable independiente.

1. $y''' - 5xy' = e^X + 1$

Solución:
Tercer orden: la derivada de mayor orden es de tercero.
Primer grado: la ecuación tiene la forma pedida en 1.2 y la tercera derivada está elevada a la primera potencia.
Es lineal: $b_3(x) = 1$, $b_2(x) = 0$, $b_1(x) = -5x$, $b_0(x) = 0$, $g(x) = e^X + 1$. La función desconocida es *y*, la variable independiente es *x*.

2. $ty'' + t^2y' - (sen\ t)\sqrt{y} = t^2 - t + 1$

Solución:
Segundo orden: la derivada de mayor orden es de segundo.
No tiene grado: a causa del término $\sqrt{y}$ la ecuación no puede escribirse como un polinomio en *y*, y sus derivadas.
No es lineal: la ecuación no puede ponerse en la forma pedida en (1.6). La función desconocida es *y*, la variable independiente es *t*.

3. $s^2 \dfrac{d^2t}{ds^2} + st\dfrac{dt}{ds} = s$

Solución:

Segundo orden.

Primer grado: la ecuación es un polinomio en la función desconocida *t* y sus derivadas (con coeficientes en *s*), y la segunda derivada está elevada a la primera potencia.

No es lineal: $b^2 = s^2$, $b_1 = st$, que depende tanto de *s* como de *t*. La función desconocida es *t*, la variable independiente es *s*.

4. $5\left(\dfrac{d^4b}{dp^4}\right)^5 + 7\left(\dfrac{db}{dp}\right)^{10} + b^7 - b^5 = p$

Solución:

Cuarto orden.

Quinto grado: La ecuación tiene la forma pedida en (1.2) y la cuarta derivada está elevada a la quinta potencia.

No es lineal: la función desconocida es *b*, la variable independiente es *p*.

5. $y\dfrac{d^2x}{dy^2} = y^2 + 1$

Solución:

Segundo orden.

Primer grado.

Lineal: $b_2(y) = y$, $b_1(y) = 0$, $b_0(y) = 0$, $g(y) = y^2 + 1$. La función desconocida es *x*. La variable independiente es *y*.

Problemas suplementarios

En las siguientes ecuaciones diferenciales determinar (a) orden, (b) grado (si es posible), (c) si es lineal o no, (d) función desconocida, (e) variable independiente.

1. $(y'')^2 - 3yy' + xy = 0$	Sol.	(a) 2	(b) 2	(c) no lineal	(d) y	(e) x
2. $x^4y^{(4)} + xy''' = e^x$	Sol.	(a) 4	(b) 1	(c) lineal	(d) y	(e) x
3. $t^2s'' - ts' = 1 - \text{sen } t$	Sol.	(a) 2	(b) 1	(c) lineal	(d) s	(e) t
4. $y^{(4)} + xy''' + x^2y'' - xy' + \text{sen } y = 0$	Sol.	(a) 4	(b) no	(c) no lineal	(d) y	(e) x
5. $d^nx/dy^n = y^2 + 1$	Sol.	(a) n	(b) 1	(c) lineal	(d) x	(e) y
6. $\left(\dfrac{d^2r}{dy^2}\right)^2 + \dfrac{d^2r}{dy^2} + y\dfrac{dr}{dy} = 0$	Sol.	(a) 2	(b) 2	(c) no lineal	(d) r	(e) y
7. $\left(\dfrac{d^2r}{dy^2}\right)^{3/2} + y = 0$	Sol.	(a) 2	(b) no	(c) no lineal	(d) y	(e) x
8. $\dfrac{d^7b}{dp^7} = 3p$	Sol.	(a) 7	(b) 1	(c) lineal	(d) b	(e) p
9. $\left(\dfrac{db}{dp}\right)^7 = 3p$	Sol.	(a) 1	(b) 7	(c) no lineal	(d) b	(e) p