TRANSFORMADA DE LAPLACE

DEFINICION

La transformada de Laplace es una ecuación integral que involucra para el caso específico del desarrollo de circuitos, las señales en el dominio del tiempo y de la frecuencia, relacionándolas como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st}F(s)ds$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

a este par de ecuaciones se les llama la *transformada bilateral de Laplace*, pues es válida para valores positivos y negativos de t; no obstante, el interés en el análisis de circuitos se centra en funciones que comienzan en un tiempo que se podría llamar inicial. Bajo esta consideración podemos “redefinir” la transformada como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st}F(s)ds$$

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

llamando este par ahora como *transformada unilateral de Laplace*. Para asegurar que las funciones que vamos a utilizar tengan transformada, estas deben cumplir básicamente con dos condiciones:

1. la función $v(t)$ debe ser integrable en todo el intervalo finito donde:

$$t_1 < t < t_2$$

2. El límite:

$$\lim_{t \to \infty} e^{-\sigma_0 t} \left| f(t) \right|$$

existe para algún valor de σ_0.

TEOREMAS Y PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE I

LINEALIDAD: la transformada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las transformadas.

$$L\left\{ f_1(t) + f_2(t) \right\} = F_1(s) + F_2(s)$$

$$L\{kf_1(t)\} = kL\{f_1(t)\}$$

LINEALIDAD:

Dadas dos funciones en el tiempo $f_1(t)$ y $f_2(t)$, se desea hallar la transformada de Laplace de la suma de dichas funciones.

$$L\{f_1(t) + f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}(f_1(t) + f_2(t))dt$$

$$L\{f_1(t) + f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_1(t)dt + \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_2(t)dt$$

$$L\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$$

Cuando una función está multiplicada por una constante, la propiedad de las integrales de no las considera para efectos de integración, esto hace que este factor salga de la transformada de Laplace y sea también factor pero de la función ya transformada:

$$L\{kf(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}(kf(t))dt$$

$$L\{kf(t)\} = k\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$$L\{kf(t)\} = kF(s)$$

Estas propiedades ayudan a simplificar transformadas en gran variedad de casos.

DERIVACIÓN EN EL TIEMPO: La diferenciación en el dominio del tiempo es equivalente a una multiplicación por s en el dominio de la frecuencia.

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$$

$$L\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$$

DERIVACIÓN EN EL TIEMPO:

Dada una función $f(t)$, se desea hallar la transformada de Laplace de la derivada de dicha función.

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt$$

Utilizando integración por partes:

$$u = e^{-st}$$
$$dv = \frac{df(t)}{dt}dt$$
$$du = -se^{-st}dt$$
$$v = f(t)$$

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = e^{-st}f(t)\Big|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t)(-se^{-st})dt$$
$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = (0 - f(0^-)) + s\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$
$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$$

para la segunda derivada tenemos:

$$L\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\,\frac{d^2f(t)}{dt^2}dt$$
$$u = e^{-st}$$
$$dv = \frac{d^2f(t)}{dt^2}dt$$
$$du = -se^{-st}dt$$
$$v = \frac{df(t)}{dt}$$
$$L\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = e^{-st}\,\frac{df(t)}{dt}\bigg|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\,\frac{df(t)}{dt}dt$$

La última integral, corresponde al caso de primera derivada que con anterioridad hemos resuelto, es por esto que reemplazamos directamente el resultado:

$$L\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = 0 - \frac{df(0^-)}{dt} + s(sF(s) - f(0^-))$$
$$L\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$$

Se pueden obtener resultados similares para derivadas superiores. Lo importante es ver que cuando las condiciones iniciales son cero, la derivación en el dominio del tiempo es equivalente a una multiplicación en el dominio de la frecuencia.

INTEGRACIÓN EN EL TIEMPO: la integración en el dominio del tiempo es equivalente a una simple división por **s** en el dominio de la frecuencia.

$$L\left\{\int_{0^-}^{t} f(t)dt\right\} = \frac{1}{s}V(s)$$

Las condiciones iniciales se evalúan, haciendo que el intervalo de integración las incluya y separar esta integral de la de Laplace.

INTEGRACIÓN EN EL TIEMPO:

Dada una función $f(t)$, deseamos hallar la transformada de Laplace de la integral de dicha función.

$$L\left\{\int_{0^-}^{t} f(t)dt\right\} = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{t} f(t)dt\right]e^{-st}dt$$

usando la técnica de integración por partes:

$$\begin{aligned}
u &= \int_{0^-}^{t} f(t)dt \\
dv &= e^{-st}dt \\
du &= f(t)dt \\
v &= -\frac{e^{-st}}{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L\left\{\int_{0^-}^{t} f(t)dt\right\} &= \left[\left[\int_{0^-}^{t} f(t)dt\right]\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]\right]\Bigg|_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}f(t)\right]dt \\
L\left\{\int_{0^-}^{t} f(t)dt\right\} &= \left[0-0\right] + \frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(t)dt \\
L\left\{\int_{0^-}^{t} f(t)dt\right\} &= \frac{1}{s}F(s)
\end{aligned}$$

Este resultado nos hace ver que la integración en el dominio del tiempo es equivalente a una división por **S** en el dominio de la frecuencia.

CONVOLUCIÓN: la convolución se define como la operación entre dos funciones, tal que:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda$$

Si se utiliza esta definición, se pueden hallar ciertas simplificaciones que son útiles en el análisis de circuitos, pues la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo, resulta ser la multiplicación de las transformadas de las funciones en el dominio de la frecuencia:

$$L\{f_1(t)*f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s)$$

CONVOLUCIÓN:

Dadas dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, se desea hallar la transformada de Laplace de la convolución de éstas, definiendo la convolución como:

$$f_1(t)*f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda$$

Bajo esta definición, y teniendo en cuenta que la transformada de Laplace obliga a la de convolución a cambiar su límite inferior por *"cero menos"* tenemos:

$$L\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \left[\int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda\right] dt$$

si introducimos en la integral interior el factor exponencial de la transformada de Laplace (ya que para la integral interior, éste factor es una constante), y cambiamos el orden de integración, podemos escribir:

$$L\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) dt\right] d\lambda$$
$$L\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) \left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_2(t-\lambda) dt\right] d\lambda$$

en la fórmula inferior, se utilizó el mismo truco de sacar de la integral interior la función dependiente de lambda, pues no depende de t. Ahora realizamos una sustitución, y de nuevo extraemos un término (exponencial) que no depende de t:

$$a = t - \lambda$$

$$L\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-s\lambda} f_1(\lambda) \left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-sa} f_2(a) da\right] d\lambda$$
$$L\{f_1(t)*f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s)$$

Esta última fórmula se obtuvo, teniendo en cuenta las variables que intervienen en cada integración de la penúltima ecuación.

DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO: Un desplazamiento en el dominio del tiempo provoca un factor exponencial en el dominio de la frecuencia, cuyo exponente es proporcional a tal desplazamiento:

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

para $a \geq 0$

DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO:

Dada una función $f(t)$, se desea hallar a transformada de Laplace de esta función pero desplazada en el tiempo una constante **a** positiva:

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t-a)u(t-a)dt$$

la función escalón unitario desplazada en el tiempo, se traduce en un cambio del límite inferior de la integral de Laplace:

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{a^-}^{\infty} e^{-st} f(t-a)dt$$

esta ecuación es válida para valores mayores o iguales a la constante **a-**. Realizamos ahora, un cambio de variable:

$$T = t - a$$

con lo cual la transformada queda:

$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-s(T+a)} f(T)dT$$
$$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Este resultado nos dice que un desplazamiento en el tiempo, produce un factor exponencial en el dominio de la frecuencia.

TEOREMAS Y PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA: Un desplazamiento en la frecuencia implica un factor exponencial en el dominio del tiempo:

$$L\{\ e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$$

Para:

$$a \geq 0$$

DESPLAZAMIENTO EN LA FRECUENCIA:

Dada una función en la frecuencia **F(s)**, se desea hallar la transformada inversa de Laplace de ésta función pero desplazada en la frecuencia una constante **a**. Como la transformada inversa de Laplace es de difícil manejo, optamos por suponer que si un desplazamiento en el tiempo produjo un factor exponencial en el dominio de la frecuencia, tal vez, un desplazamiento en el dominio de la frecuencia se refleje en un factor exponencial en el dominio del tiempo:

$$L\left\{e^{-at}f(t)\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}e^{-at}f(t)dt$$
$$L\left\{e^{-at}f(t)\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)}f(t)dt$$
$$L\left\{e^{-at}f(t)\right\} = F(s+a)$$

con este sencillo procedimiento, confirmamos la hipótesis que planteamos al principio.

Esta propiedad nos ayuda en aquellos casos en los cuales, necesitamos obtener rápidamente la transformada de una función desplazada, a partir de la transformada de la función sin el desplazamiento.

Por ejemplo, si sabemos la transformada de t, que es:

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

y agregamos un factor exponencial afectando a t, obtenemos:

$$L\left\{e^{-at}t\right\} = \frac{1}{(s+a)^2}$$

DERIVACIÓN EN FRECUENCIA: si derivamos con respecto a **s** en frecuencia, obtenemos en el dominio del tiempo un factor de $-t$:

$$L\left\{-t\ f(t)\right\} = \frac{d}{ds}F(s)$$

DERIVACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA:

Dada una función en la frecuencia **F(s)** se desea hallar la transformada inversa de Laplace de la derivada de dicha función. En esta ocasión es más fácil trabajar directamente con la definición de la transformada:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(t)dt = \int_{0^-}^{\infty} -te^{-st}f(t)dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\left[-tf(t)\right]dt$$
$$\frac{d}{ds}F(s) = L\left\{-tf(t)\right\}$$

resultado que expresa que si derivamos una función en el dominio de la frecuencia, esto se traduce en una multiplicación por $-t$ en el dominio del tiempo.

INTEGRACIÓN EN FRECUENCIA: Si se integra en el dominio de la frecuencia con respecto a **s**, en el dominio del tiempo tenemos que dividir por t:

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(s)ds$$

INTEGRACIÓN EN FRECUENCIA:

Dada una función en la frecuencia **F(s)** se desea hallar la transformada inversa de Laplace de la integral de dicha función. Si tomamos la definición de la transformada de Laplace:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

realizamos una integración en la frecuencia, con límite inferior **S**, y límite superior infinito:

$$\int_s^{\infty} F(s)ds = \int_s^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)dt\right]ds$$

Cambiamos el orden de integración, para después llevar a cabo al integración en frecuencia:

$$\int_s^{\infty} F(s)ds = \int_{0^-}^{\infty}\left[\int_s^{\infty} e^{-st}ds\right]f(t)dt$$

$$\int_s^{\infty} F(s)ds = \int_{0^-}^{\infty}\left[\left[-\frac{1}{t}e^{-st}\right]\right|_s^{\infty} f(t)dt$$

$$\int_s^{\infty} F(s)ds = \int_{0^-}^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-st}dt$$

$$\int_s^{\infty} F(s)ds = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

Este resultado nos deja ver que si integramos una función en el dominio de la frecuencia, esto se traduce en una división por t en el dominio del tiempo.

CAMBIO DE ESCALA EN EL TIEMPO: si en una función en el dominio del tiempo, este tiene como factor una constante, la transformada cambia de acuerdo a dicha constante:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F(s/a)$$

CAMBIO DE ESCALA EN EL TIEMPO:

Dada una función $f(t)$, se desea hallar la transformada de Laplace de ésta función pero cambiando la escala de t, en un factor a mayor o igual a cero:

$$L\{f(at)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(at)dt$$

hacemos un cambio de variable con:

$$v = at$$

con lo cual la transformada queda:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}\int_{0^-}^{\infty} e^{-(s/a)v} f(v)dv$$
$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

el factor $\frac{1}{a}$, se debe al cambio del diferencial de tiempo:

$$dt = \frac{1}{a}dv$$

y con esto la integral corresponde a la definición de la transformada de Laplace, pero en lugar de **s** ponemos **s**/a.

TEOREMA DEL VALOR INICIAL: si se conoce la transformada de Laplace de una función $f(t)$, el valor inicial de dicha función puede obtenerse multiplicando **F(s)** por **s** y hacer que $s \to \infty$:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty}\left[s\ F(s)\right]$$

TEOREMA DEL VALOR INICIAL:

El teorema del valor inicial, plantea que si conocemos la transformada de Laplace de una función, podemos hallar el valor inicial de dicha función si a la función transformada le multiplicamos por un factor **s** y hacemos tender a infinito precisamente la variable **s**:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to 0}\left[sF(s)\right]$$

Si partimos de la transformada de una derivada, podemos escribir:

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt$$

en esta última ecuación hacemos que s tienda a infinito y separamos la integral en dos partes:

$$\lim_{s\to\infty}\left[sF(s)-f(0^-)\right]=\lim_{s\to\infty}\left[\int_{0^-}^{0^+}e^0\,\frac{df(t)}{dt}\,dt+\int_{0^+}^{\infty}e^{-st}\,\frac{df(t)}{dt}dt\right]$$

el factor exponencial de la última integral se hace cero cuando evaluamos el límite, por lo tanto, la integral se hace cero. En el lado izquierdo de la ecuación, podemos extraer $-f(0\text{-})$:

$$-f(0^-)+\lim_{s\to\infty}\left[sF(s)\right]=\lim_{s\to\infty}\int_{0^-}^{0^+}df(t)=\lim_{s\to\infty}\left[f(0^+)-f(0^-)\right]$$
$$-f(0^-)+\lim_{s\to\infty}\left[sF(s)\right]=f(0^+)-f(0^-)$$
$$\lim_{s\to\infty}\left[sF(s)\right]=f(0^+)$$
$$\lim_{s\to\infty}\left[sF(s)\right]=\lim_{t\to 0^+}f(t)$$

Y así llegamos al resultado deseado.

TEOREMA DEL VALOR FINAL: si se conoce la transformada de Laplace de una función $f(t)$, el valor final de dicha función puede obtenerse multiplicando **F(s)** por **s** y hacer que $s\to 0$:

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}\left[s\ \ F(s)\right]$$

TEOREMA DEL VALOR FINAL:

Consideremos la transformada de Laplace de la derivada de una función:

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}=sF(s)-f(0^-)=\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}\,\frac{df(t)}{dt}dt$$

se hace ahora que la variable **s** tienda a cero:

$$\lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0^-)\right]=\lim_{s\to 0}\int_{0^-}^{\infty}e^{-st}\,\frac{df(t)}{dt}dt$$
$$\lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0^-)\right]=\int_{0^-}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}dt$$

manipulamos convenientemente el término integral de la anterior ecuación:

$$\int_{0^-}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}dt=\lim_{t\to\infty}\int_{0^-}^{t}\frac{df(t)}{dt}\,dt=\lim_{t\to\infty}\left[f(t)-f(0^-)\right]$$

y reemplazamos:

$$\lim_{s\to 0}\left[sF(s)-f(0^-)\right]=\lim_{s\to\infty}\left[f(t)-f(0^-)\right]$$
$$-f(0^-)+\lim_{s\to 0}\left[sF(s)\right]=-f(0^-)+\lim_{s\to\infty}\left[f(t)\right]$$
$$\lim_{s\to 0}\left[sF(s)\right]=\lim_{s\to\infty}f(t)$$

El teorema del valor final, plantea que si conocemos la transformada de Laplace de una función, podemos hallar el valor final de dicha función, si a la función transformada le multiplicamos por un factor **s** y hacemos tender a cero precisamente la variable **s**. Cabe anotar que este teorema tiene restricciones:

*Sólo es útil para transformadas cuyos polos se encuentren en el semiplano izquierdo del plano **s**. (la única excepción es el polo simple **s**=0)

*Tanto $f(t)$ como su derivada, deben tener una función transformada.

TRANSFORMADAS DE FUNCIONES COMUNES

Las transformadas que se muestran a continuación se obtienen de integración directa o algunas veces utilizando los teoremas. Cabe anotar, que las funciones de tiempo aquí descritas, son válidas para *t* mayores a cero.

$f(t)$	$L\{f(t) = F(s)\}$
1. 1	$\dfrac{1}{s}$
2. t^n, $n = 1, 2, 3,\ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
3. $t^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$
4. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
5. sen kt	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$
6. cos kt	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$
7. senh kt	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
8. cosh kt	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
9. $e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
10. $f(t-a)\,\mathrm{U}(t-a)$, $a > 0$	$e^{-as} F(s)$
11. $t^n f(t)$, $n = 1, 2, 3,\ldots$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$
12. $f^{(n)}(t)$, $n = 1, 2, 3,\ldots$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
13. $\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$	$F(s)\, G(s)$

Función	***Transformada***
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-\tau)$	$e^{-st}F(s)$
$e^{-at}(1-at)$	$s/(s+a)^2$
ie^{-at}	$1/(s+a)^2$
$(1/a^3)(ai - sen\ \ at)$	$1/(s(s^2-a^2))$
$(1/a^2)(1-\cos\ \ at)$	$1/(s(s^2+a^2))$
$senh\ \ ai$	$a/(s^2-a^2)$
$\cosh\ \ at$	$s/(s^2-a^2)$
$sen\ \ ai$	$a/(s^2+a^2)$
$\cos\ \ at$	$s/(s^2+a^2)$
$(1/a)(1-e^{-at})$	$1/(s(s+a))$
e^{-at}	$1/(s+a)$
$t^{n-1}/(n-1)!$	$1/s^n$
$escalón\ \ unitario\ \ en\ \ t=0, u(t)$	$1/s$
$impulso\ \ unitario\ \ en\ \ t=0, \partial(t)$	1
$\int_0^t f(t)dt$	$F(s)/s$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
$(t/2a)\text{sen}\ \ at$	$s/(s^2+a^2)^2$
$(1/2a^3)(\text{sen}\ \ at - at\cos\ \ ai)$	$1/(s^2+a^2)^2$

APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE A LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En las anteriores secciones se han estudiado varios conceptos teóricos referentes a la transformada de Laplace, sin embargo, nuestro objetivo fundamental, es tomar ésta teoría y aplicarla en la resolución de problemas de ingeniería y mas específicamente en el análisis de circuitos eléctricos.

Por tal motivo, en esta sección se presentarán ejemplos que sean claros y lo suficientemente generalizables, para que el estudiante pueda mas tarde llevar a cabo problemas similares ó con algún grado de dificultad superior.

El primer paso, será aprender *la transformada* que está asociada a cada parámetro ó componente eléctrica:

EL PARÁMETRO RESISTIVO

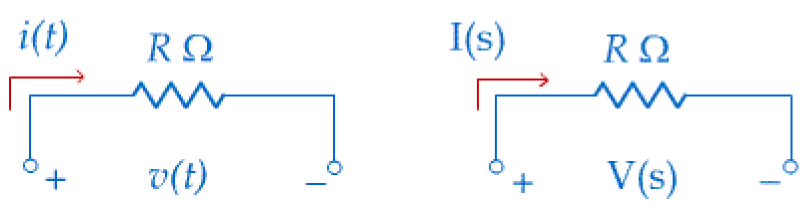
La transformada de Laplace en un circuito meramente resistivo, no tiene efecto sino en las funciones de voltaje y corriente:

$$v(t) = R\ i(t)$$

cuya transformada es:

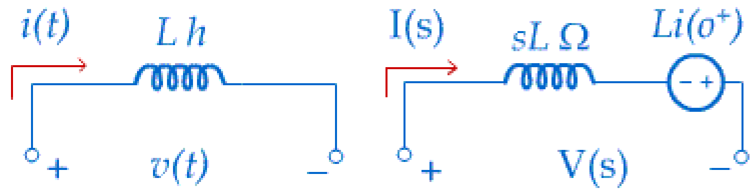
$$V(s) = R\ I(s)$$

Estos resultados se pueden observar en la figura:



PARÁMETRO INDUCTIVO

Observe la figura, y detalle que para una inductancia **L** en Henrys, que posee una corriente inicial de $i\,(0+)$ A en la dirección de la corriente $i\,(t)$, se transforma en el dominio de **s** como una impedancia **sL** en ohmios, en serie con una fuente de voltaje cuyo valor en **s** es **L**$i\,(t)$ y que va en la dirección de la corriente **I(s)**.



La ecuación que describe el comportamiento del inductor en el dominio del tiempo es:

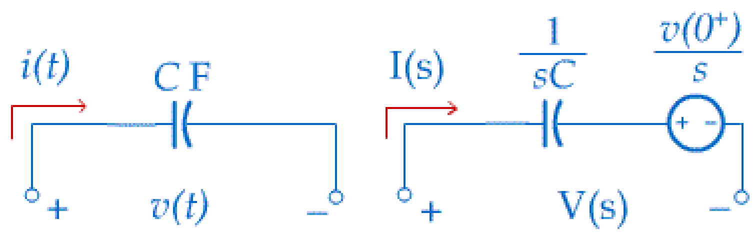
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

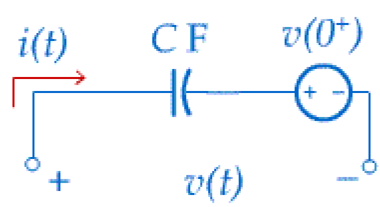
cuya respectiva transformada es:

$$V(s) = sLI(s) - Li(0^{+})$$

PARÁMETRO CAPACITIVO

La figura que se observa en esta sección, muestra una capacitancia de **C** farads en el dominio del tiempo; en el dominio de **s**, ésta se transforma en una impedancia y una fuente de voltaje en serie oponiéndose a la corriente $i\,(t)$, cuyos valores se observan también en dicha figura:





En el dominio del tiempo se tiene:

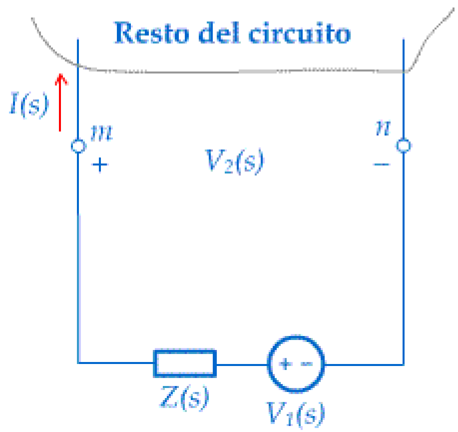
$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

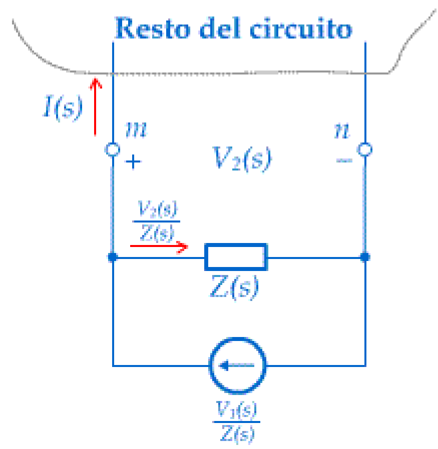
transformamos esta ecuación, y obtenemos:

$$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^{+})}{s}$$

FUENTES

En cuanto a fuentes, la transformada depende de la función que caracterice a dicha fuente. Otra herramienta que debemos aprender, es el intercambio de fuentes:





En la primera figura, se cumple:

$$Z(s)I(s) = V_1(s) - V_2(s)$$

despejamos $I(s)$:

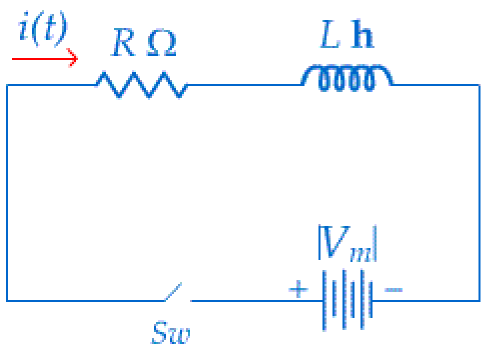
$$I(s) = \frac{V_1(s)}{Z(s)} + \frac{V_2(s)}{Z(s)}$$

Resultado que nos conduce a la segunda figura. Estas transformaciones son bidireccionales, es decir, si tenemos una fuente de corriente en paralelo con una impedancia se convertirán en una fuente de voltaje en serie con la impedancia, y viceversa.

Como segunda instancia, se aprenderán a resolver circuitos que contengan los anteriores parámetros, e involucren corrientes, voltajes y condiciones iniciales:

CIRCUITO RL SERIE CON FUENTE DC

Considere el circuito de la figura:



La ecuación diferencial que resulta de hacer LVK, es:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = \left|V_m\right|$$

sometiendo esta ecuación a la transformada de Laplace, obtenemos:

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) = \frac{\left|V_m\right|}{s}$$

De esta ecuación despejamos **I(s)**:

$$I(s) = \frac{\dfrac{\left|V_m\right|}{s} + Li(0^+)}{R + sL}$$

Ahora, cambiamos la forma del denominador para realizar un procedimiento de fracciones parciales:

$$I(s) = \frac{\dfrac{\left|V_m\right|}{L} + si(0^+)}{s(s + R/L)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + R/L}$$

hallamos el coeficiente *A*, igualando **s** a cero:

$$A = \left. \frac{\frac{|V_m|}{L} + s\,i(0^+)}{s + R/L} \right|_{s=0} = \frac{|V_m|}{R}$$

hallamos el coeficiente *B*, igualando **s** a R/L, y reemplazamos los valores:

$$B = \left. \frac{\frac{|V_m|}{L} + s\,i(0^+)}{s} \right|_{s=-R/L} = -\frac{|V_m|}{R} + i(0^+)$$

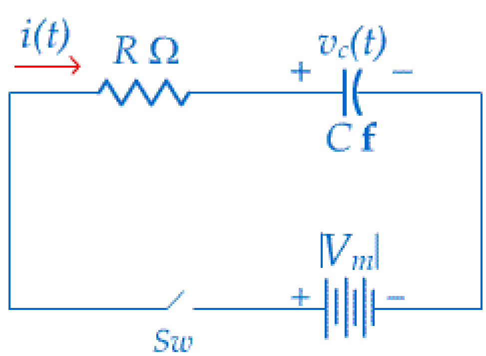
$$I(s) = \frac{\frac{|V_m|}{R}}{s} + \frac{-\frac{|V_m|}{R} + i(0^+)}{s + R/L}$$

finalmente, aplicamos transformada inversa de Laplace, para que la respuesta esté en el dominio del tiempo:

$$i(t) = \frac{|V_m|}{R} + \left[-\frac{|V_m|}{R} + i(0^+) \right] e^{-(R/L)t}$$

CIRCUITO RC SERIE CON FUENTE DC

Observe la siguiente figura:



La ecuación integral que resulta de hacer LVK, es:

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=\left|V_m\right|$$

aplicando transformada de Laplace:

$$RI(s)+\frac{1}{sC}I(s)+\frac{v(0^+)}{s}=\frac{\left|V_m\right|}{s}$$

despejamos **I(s)**:

$$I(s)=\frac{\frac{\left|V_m\right|-v(0^+)}{s}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{\frac{\left|V_m\right|-v(0^+)}{R}}{s+\frac{1}{RC}}$$

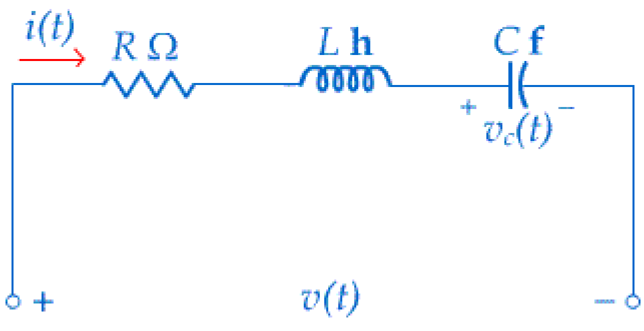
Si observamos detenidamente esta última ecuación, nos damos cuenta que podemos aplicar directamente la transformada inversa de Laplace:

$$i(t)=\left[\frac{\left|V_m\right|-v(0^+)}{R}\right]e^{-(1/RC)t}$$

Este resultado generaliza la respuesta en el dominio del tiempo para este tipo de circuitos.

CIRCUITO RLC SERIE CON CONDICIONES INICIALES

Considere el circuito de la figura, donde la corriente inicial del inductor es $i(0^+)$ amperes, y el voltaje inicial en el condensador es $v_c(0^+)$ volts, con la polaridad indicada:



Si aplicamos LVK, obtenemos la ecuación integro-diferencial:

$$Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)dt=V(t)$$

le aplicamos transformada de Laplace, y se obtiene:

$$RI(s) + sLI(s) - Li(0^+) + \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v_c(0^+)}{s} = V(s)$$

arreglamos esta ecuación, de tal forma que se pueda ver de forma mas clara:

$$I(s) = \left[\frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}} \right] \left[V(s) + Li(0^+) - \frac{v_c(0^+)}{s} \right]$$

El primer factor de esta ecuación corresponde a la función del sistema, mientras que el segundo factor corresponde a la función de excitación. De acuerdo a lo anterior, el primer factor puede ser expresado de la siguiente forma:

$$Y(s) = \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

en Siemens.

Y dada la relación entre admitancia e impedancia:

$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)}$$

podemos deducir que:

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC} \ \Omega$$

ahora, dejamos todo en una sola fracción:

$$Z(s) = \frac{s^2LC + sRC + 1}{sC} \ \Omega$$

Si detallamos la última ecuación escrita, y la relacionamos con la ecuación donde está despejada **I(s)**, veremos que los ceros de **Z(s)** son los que en últimas determinan el comportamiento del circuito. Lo anterior, escrito en una ecuación sería:

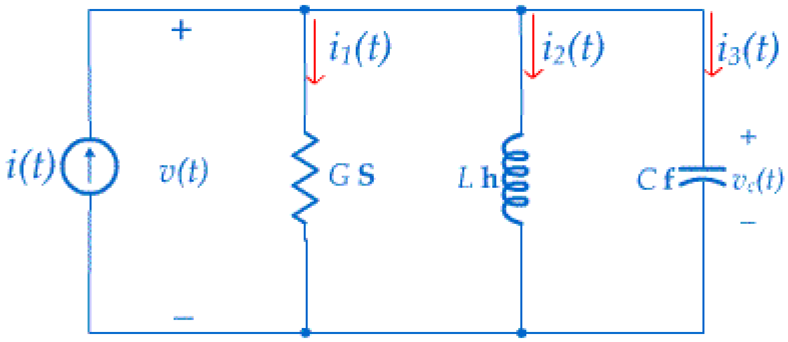
$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$$

Después de tener en cuenta todas estas consideraciones, lo único que resta es encontrar la respuesta en el dominio del tiempo; sin embargo, no se puede generalizar una respuesta debido a que dependiendo de las funciones de excitación y de las condiciones iniciales, la respuesta en el tiempo cambia. Lo que haremos entonces es plantear la ecuación de transformada inversa de Laplace:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{V(s) + Li(0^+) - \frac{v_c(0^+)}{s}}{Z(s)}\right\}$$

CIRCUITO RLC PARALELO CON CONDICIONES INICIALES

La fuente de corriente $i(t)$ de la figura, es la que excita el circuito. El inductor lleva una corriente inicial $i_2(0^+)$. En la misma dirección de $i_2(t)$. El voltaje inicial del condensador es $v_c(0^+)$ con la polaridad opuesta al sentido de la corriente $i_3(t)$.



Por LCK:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = i(t)$$

Hallamos el equivalente de cada una de estas corrientes, para el caso del resistor en siemens:

$$i_1(t) = Gv(t)$$

para el inductor:

$$i_2(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt$$

y para el condensador:

$$i_3(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Reemplazamos estas tres expresiones en la primera ecuación:

$$Gv(t) + \frac{1}{L}\int v(t)dt + C\frac{dv(t)}{dt} = i(t)$$

Aplicamos transformada de Laplace, y el resultado es:

$$GV(s) + \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i_2(0^+)}{s} + sCV(s) - Cv(0^+) = I(s)$$

arreglamos esta ecuación, de tal forma que se pueda ver de forma mas clara:

$$V(s) = \left[\frac{1}{G + sC + \frac{1}{sL}}\right]\left[I(s) + Cv(0^+) - \frac{i_2(0^+)}{s}\right]$$

El primer factor de esta ecuación corresponde a la función del sistema, mientras que el segundo factor corresponde a la función de excitación. De acuerdo a lo anterior, el primer factor es una impedancia que puede ser expresada de la siguiente forma:

$$Z(s) = \frac{1}{G + sC + \frac{1}{sL}} \quad \Omega$$

o una admitancia cuyo valor es:

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = G + sC + \frac{1}{sL}$$

en Siemens

los polos de **Z(s)** o los ceros de **Y(s)**, determinan el comportamiento transitorio de la función respuesta **V(s)**. La función respuesta en el dominio del tiempo es:

$$v(t) = L^{-1}\left\{V(s)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{I(s) + Cv(0^+) - \frac{i_2(0^+)}{s}}{Y(s)}\right\}$$

Estudiemos un caso de superposición resuelto con transformada de Laplace:

SOLUCIÓN POR SUPERPOSICIÓN

La función respuesta para el caso del circuito RLC serie con excitación de voltaje, puede ser expresada como:

$$I(s) = I'(s) + I''(s) + I'''(s)$$

donde:

$$I'(s) = Y(s)V(s)$$
$$I''(s) = Y(s)\left[Li(0^+)\right]$$
$$I'''(s) = -Y(s)\left[\frac{v(0^+)}{s}\right]$$

De forma similar, la respuesta para el circuito RLC paralelo con fuente de voltaje como excitación, puede escribirse:

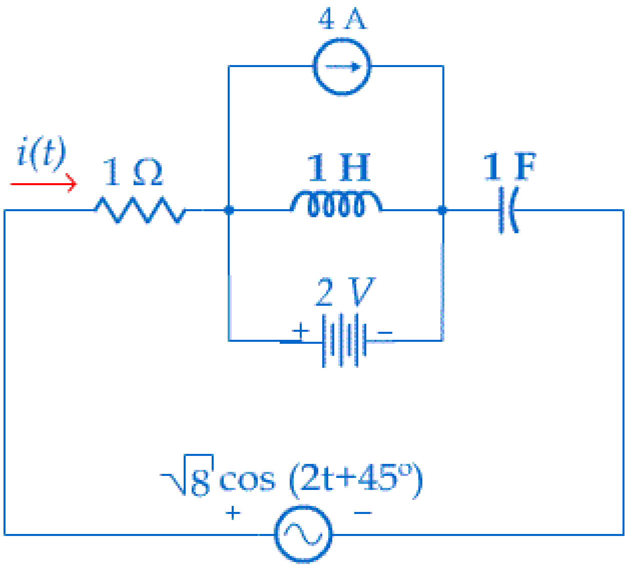
$$V(s) = V'(s) + V''(s) + V'''(s)$$

donde:

$$V'(s) = Z(s)I(s)$$
$$V''(s) = Z(s)\left[Cv(0^+)\right]$$
$$V'''(s) = -Z(s)\left[\frac{i_2(0^+)}{s}\right]$$

con estas ecuaciones, se puede concluir que la función respuesta es la suma de componentes separadas, cada una de ellas obtenida dejando una fuente activa mientras las otras son cero (*Teorema de Superposición*).

A continuación, se presenta un ejemplo que resume de forma práctica este procedimiento. El siguiente circuito posee tres fuentes, una de voltaje senoidal, otra de voltaje DC, y otra de corriente DC:



Como primer paso, recordamos la transformada de coseno y aplicamos la transformada de Laplace a la fuente de voltaje:

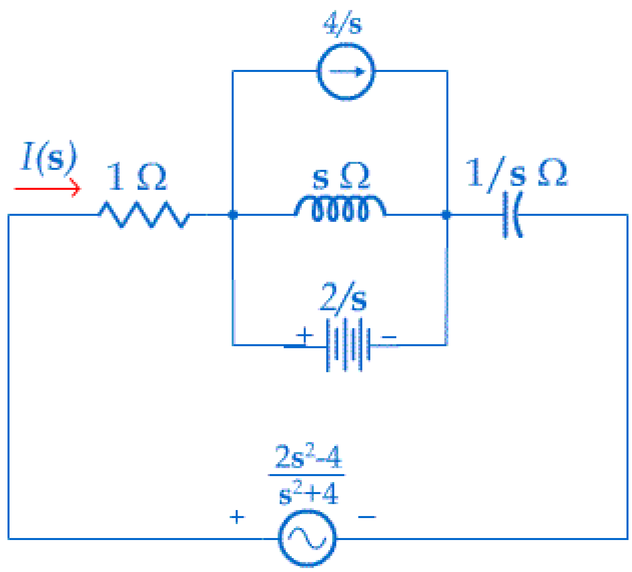
$$v(t) = \sqrt{8}\cos(2t + 45°)$$

$$L\{v(t)\} = \sqrt{8}\,\frac{s\cos 45° - 2\,\mathrm{sen}\,45°}{s^2 + 2^2}$$

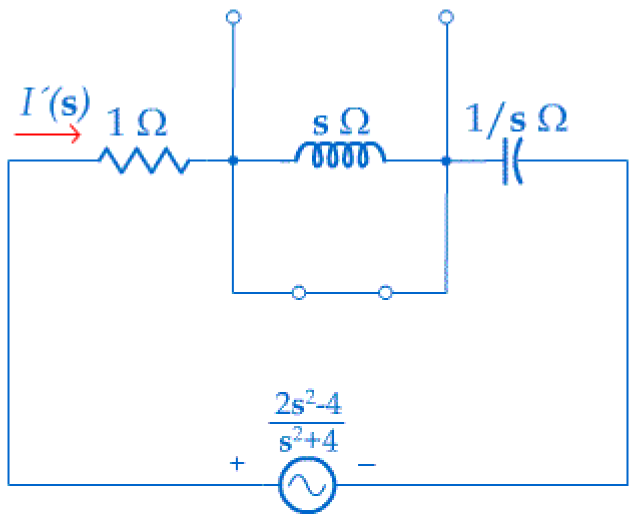
$$L\{v(t)\} = \sqrt{8}\,\frac{s\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2}}{s^2 + 4}$$

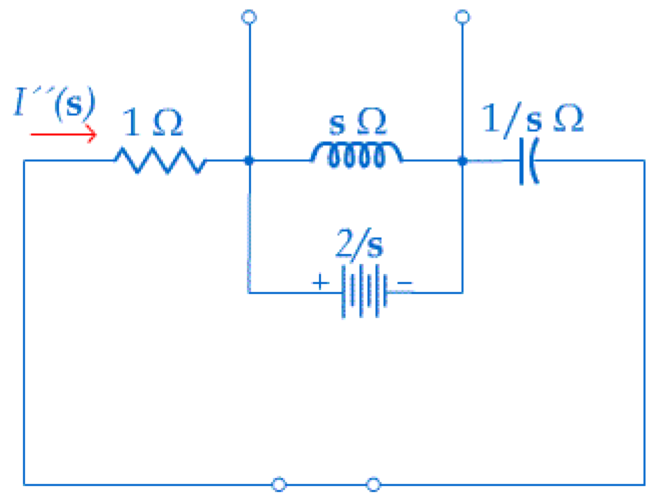
$$L\{v(t)\} = \frac{s\frac{\sqrt{16}}{2} - \sqrt{16}}{s^2 + 4}$$

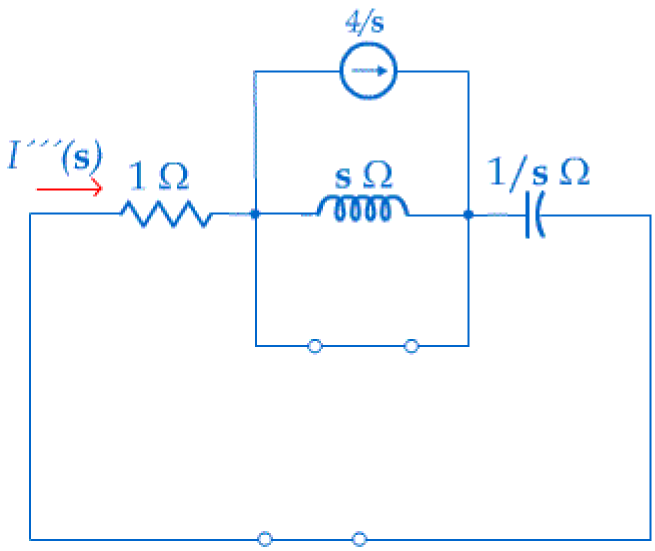
$$L\{v(t)\} = \frac{2s - 4}{s^2 + 4}$$



cada una de las tres fuentes se analiza como si las otras dos fuesen cero. Hay que tener en cuenta que cuando una fuente de voltaje se reduce a cero, en su lugar queda un corto-circuito; cuando se trata de una fuente de corriente, queda un circuito-abierto. Las tres situaciones se presentan en los circuitos a continuación:







del primer circuito podemos extraer la primera componente de la función respuesta:

$$I'(s) = \frac{\dfrac{2s-4}{s^2+4}}{1+\dfrac{1}{s}} = \frac{s(2s-4)}{(s^2+4)(s+1)}$$

y de los otros dos:

$$I''(s) = -\frac{\frac{2}{s}}{1+\frac{1}{s}} = -\frac{2}{s+1}$$

$$I'''(s) = 0$$

La tercera componente es cero, porque la corriente de la fuente fluye toda por el corto-circuito.

De acuerdo a lo expuesto al principio de esta sección, la respuesta es igual a la suma de las componentes:

$$I(s) = I'(s) + I''(s) + I'''(s)$$

$$I(s) = \frac{s(2s-4)}{(s^2+4)(s+1)} - \frac{2}{s+1} = \frac{-4s-8}{(s^2+4)(s+1)}$$

Ahora aplicamos transformada inversa de Laplace, para encontrar la respuesta en el dominio del tiempo:

$$i(t) = L^{-1}\left\{\frac{-4s-8}{(s^2+4)(s+1)}\right\}$$

$$i(t) = L^{-1}\left\{\frac{A}{s+j2} + \frac{B}{s-j2} + \frac{C}{s+1}\right\}$$

Esta expansión de fracciones parciales se hace con el fin de facilitar la transformación inversa y utilizar pares de transformadas. Los valores de los coeficientes A, B y C, son:

$$A = \left.\frac{-4s-8}{(s^2-j2)(s+1)}\right|_{s=-j2} = 1.264\angle -71.55°$$

$$B = A^* = 1.264\angle 71.55°$$

$$C = \left.\frac{-4s-8}{s^2+4}\right|_{s=-1} = -0.8$$

reemplazamos estos coeficientes y obtenemos:

$$i(t) = L^{-1}\left\{1.264\left[\frac{e^{-i71.55°}}{s+j2} + \frac{e^{i71.55°}}{s-j2}\right] - \frac{0.8}{s+1}\right\}$$

$$i(t) = 2.53\cos(2t+71.55°) - 0.8e^{-t}$$

vemos que la transformada de coseno puede tener equivalentes en exponenciales de frecuencia.

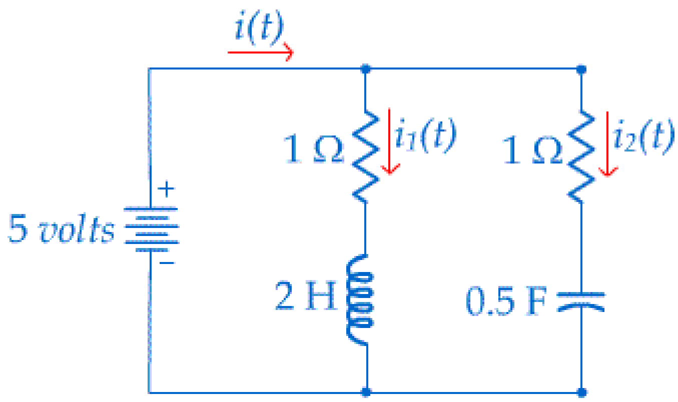
Finalmente, dos ejemplos que involucran conceptos de esta sección y de todo el capitulo:

EJEMPLO 1

Dado el circuito de la figura, con las siguientes condiciones iniciales:

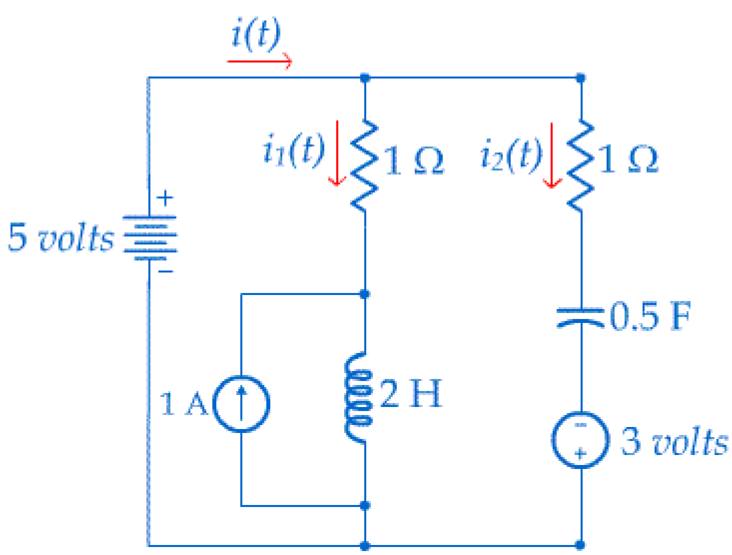
$$i_L(0^+) = 1\ A$$
$$v_C(0^+) = 3$$

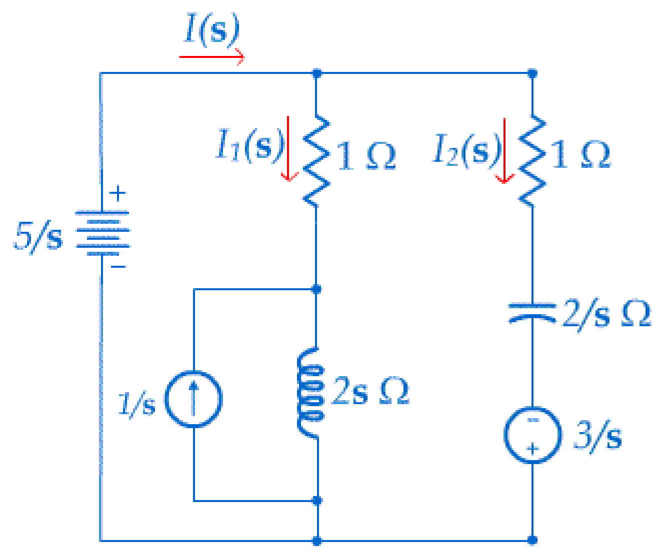
Encuentre $i(t)$, utilizando la transformada de Laplace.



SOLUCIÓN:

Como primer paso, incluimos las condiciones iniciales en el circuito del dominio del tiempo, y luego transformamos todo el circuito al dominio de la frecuencia:





La ecuación principal para resolver el problema, es:

$$I(s) = I_1(s) + I_2(s)$$

Ahora planteamos dos ecuaciones de malla, teniendo en cuenta que la segunda ecuación corresponde a la malla exterior del circuito:

$$I_1(s) + 2s\left[I_1(s) + \frac{1}{s}\right] = \frac{5}{s}$$

$$\left(1 + \frac{2}{s}\right) I_2(s) = \frac{8}{s}$$

despejamos estas ecuaciones:

$$I_1(s) = \frac{\frac{5}{s} - 2}{2s + 1} = \frac{-s + 2.5}{s(s + 0.5)}$$

$$I_2(s) = \frac{\frac{8}{s}}{1 + \frac{2}{s}} = \frac{8}{s + 2}$$

Y reemplazando en la ecuación principal:

$$I(s) = \frac{-s + 2.5}{s(s + 0.5)} + \frac{8}{s + 2}$$

separamos el primer sumando en fracciones parciales, ya que el segundo sumando ya posee coeficiente:

$$\frac{-s+2.5}{s(s+0.5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0.5}$$

hallamos estos coeficientes:

$$A = \left.\frac{-s+2.5}{s+0.5}\right|_{s=0} = 5$$

$$B = \left.\frac{-s+2.5}{s}\right|_{s=-0.5} = -6$$

con lo cual la función respuesta en el dominio de la frecuencia, es:

$$I(s) = \frac{5}{s} - \frac{6}{s+0.5} + \frac{8}{s+2}$$

Esta ecuación podemos convertirla directamente al dominio del tiempo:

$$i(t) = 5 - 6e^{-0.5t} + 8e^{-2t}$$

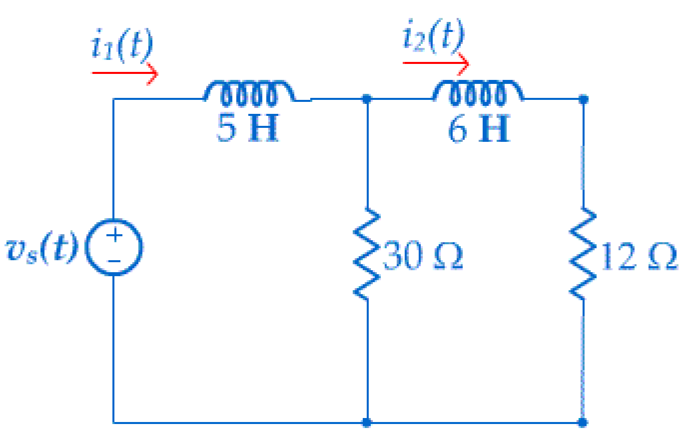
EJEMPLO 2

Según el circuito de la figura, encuentre:

a) $H(s) = \dfrac{I_2(s)}{V_s(s)}$

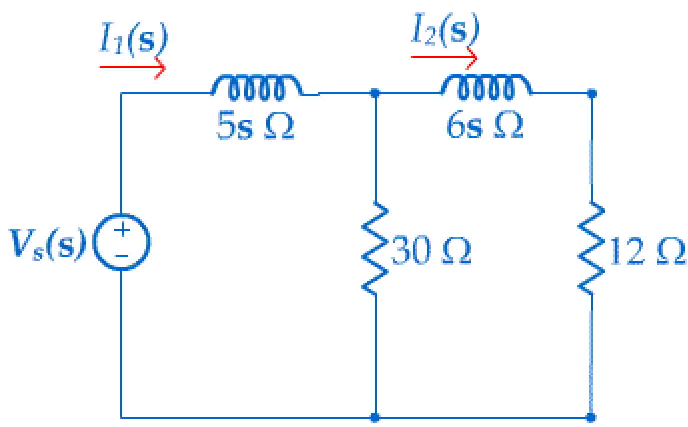
b) $h(t)$

c) $i_2(t)$ si $v_s(t) = 132\ u(t)$



SOLUCIÓN:

a) Transformamos el circuito al dominio de la frecuencia:



Planteamos las siguientes ecuaciones de malla:

$$V_s(s) = 5sI_1(s) + 30(I_1 - I_2)$$
$$0 = -30I_1(s) + 6sI_2(s) + 42I_2(s)$$

Organizando estas ecuaciones:

$$V_s(s) = (5s + 30)I_1(s) - 30I_2(s)$$
$$0 = -30I_1(s) + (6s + 42)I_2(s)$$

despejamos de la segunda ecuación el valor de $I_1(s)$, y lo reemplazamos en la primera ecuación:

$$I_1(s) = \frac{6s + 42}{30} I_2(s)$$
$$V(s) = (s^2 + 7s + 6s + 42 - 30)I_2(s)$$
$$H(s) = \frac{I_2(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{s^2 + 13s + 12}$$

Esta última ecuación es una función de transferencia del circuito.

b) Para saber el equivalente de $H(s)$ en el dominio del tiempo, aplicamos fracciones parciales:

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{s^2 + 13s + 12}$$
$$\frac{1}{s^2 + 13s + 12} = \frac{A}{(s + 12)} + \frac{B}{(s + 1)}$$

En esta ocasión, empleamos el planteamiento de ecuaciones para hallar los coeficientes **A** y **B**:

$$1 = A(s+1) + B(s+12)$$
$$1 = (A+B)s + (A+12B)$$
$$A + B = 0$$
$$A + 12B = 1$$

resolvemos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$A = -\frac{1}{11}$$
$$B = \frac{1}{11}$$

con lo cual, la función $H(s)$ queda:

$$H(s) = \frac{-1/11}{(s+12)} + \frac{1/11}{(s+1)}$$

ecuación a la que aplicamos directamente la tabla de transformadas inversas, lo que se traduce en una respuesta en el dominio del tiempo:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{11}\left(e^{-t} - e^{-12t}\right)u(t)\ [A/V]$$

c) Tomamos la función de transferencia $H(s)$ y despejamos el valor de $I_2(s)$ en términos de $V_S(s)$:

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{(s+12)(s+1)}$$
$$I_2(s) = \frac{1}{(s+12)(s+1)} V_s(s)$$

Aplicamos la transformada de Laplace a la función $v_S(t)$, y reemplazamos el resultado en la anterior ecuación:

$$v_s(t) = 132u(t)$$
$$V_s(s) = L\{132u(t)\} = \frac{132}{s}$$
$$I_2(s) = \frac{132}{s(s+12)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+12)} + \frac{C}{(s+1)}$$

hallamos estos coeficientes, utilizando la misma técnica que se uso en el ítem anterior:

$$132 = A(s+12)(s+1) + Bs(s+1) + Cs(s+12)$$

ordenando:

$$132 = (A+B+C)s^2 + (13A+B+12C)s + 12A$$
$$A+B+C=0$$
$$13A+B+12C=0$$
$$12A=132$$

resolviendo este sistema, obtenemos:

$$A=11$$
$$B=1$$
$$C=-12$$

con lo cual la función $I_2(s)$ se puede rescribir como:

$$I_2(s) = \frac{11}{s} + \frac{1}{(s+12)} - \frac{12}{(s+1)}$$

y finalmente, aplicando pares de transformadas para regresar al dominio del tiempo, se llega a:

$$i_2(t) = L^{-1}\left\{I_2(s)\right\} = \left[11 + e^{-12t} - 12e^{-t}\right]u(t) \quad [A]$$