Tema 8. Ecuaciones diferenciales lineales

8.1 UN FACTOR DE INTEGRACIÓN

La ecuación diferencial lineal de primer orden se definió en (3.3) como
y' + p(x)y = q(x) (8.1)
Un factor de integración para *(8.1)* está dado por

$$I(x,y)=e^{\int v(x)dx} \qquad (8.2)$$

Nótese que para una ecuación lineal, el factor de integración no depende de *y*. Recordamos que el factor de integración se definió originalmente para ecuaciones en forma diferencial (ver Tema 7.1). Sin embargo, es más conveniente trabajar con ecuaciones diferenciales lineales en la forma *(8.1).*

Ejemplo 8.1
Hallar un factor de integración para *y' – 2xy = x.*
Solución:
Aquí, *p(x)* = – *2x.* Entonces

$$\int p(x)dx=\int(-2x)dx=-x^2$$

$$\therefore\ I(x,y)=e^{\int p(x)dx}=e^{-x^2}$$

Si escribimos la ecuación dada en forma diferencial y después multiplicamos por *I(x,y],* obtenemos

$$\left(-2xye^{-x^2}-xe^{-x^2}\right)dx+e^{-x^2}dy=0$$

que es exacta. Entonces, $I(x,y)=e^{-x^2}$ es un factor de integración como se definió en el Tema 7.1.
|¿ |s;h'v'«í»–í

8.2 MÉTODO DE SOLUCIÓN

Multiplique (8.1) por *I(x,y)* como se definió en (8.2). El lado izquierdo de la ecuación resultante será igual a $\frac{d[yI(x,y)]}{dx}$. La integración directa de esta ecuación resultante da entonces la solución de *(8.1).*

Problemas resueltos

8.1 Resolver *y'– 3y* = 6.
Solución:
Aquí *p(x)* = –3. Resolviendo para el factor de integración, tenemos

$$\int p(x)dx=\int(-3)dx=-3x$$

$$\therefore\ I(x,y)=e^{\int p(x)dx}=e^{-3x}$$

Multiplicando la ecuación diferencial por *l(x, y},* obtenemos

$$e^{-3x}y'-3e^{-3x}y=6e^{-3x}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left(ye^{-3x}\right)=6e^{-3x}$$

Integrando ambos lados de esta ecuación con respecto de *x,* obtenemos

$$\int\frac{d}{dx}\left(ye^{-3x}\right)dx=\int\left(6e^{-3x}\right)dx$$

$$ye^{-3x}=-2e^{-3x}+C$$

$$y=Ce^{3x}-2$$

8.2 Resolver y' – 2xy = x.
Solución:
Del Ejemplo 8.1, $I(x,y)=e^{-x^2}$. Multiplicando la ecuación diferencial por *I(x, y) obtenemos*

$$e^{-x^2}y'-2xe^{-x^2}y=xe^{-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{-x^2}\right)=xe^{-x^2}$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a *x*, encontramos que

$$\int\frac{d}{dx}\left(ye^{-x^2}\right)dx=\int\left(xe^{-x^2}\right)dx$$

$$ye^{-x^2}=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$$

$$y=Ce^{x^2}-\frac{1}{2}$$

8.3 Resolver y' + (4/x)y = x^4.
Solución:
Aquí *p(x) = 4/x:* por lo tanto

$$\int p(x)dx=\int\left(\frac{4}{x}\right)dx=4\ln x^4$$

$$\therefore\ I(x,y)=e^{\int p(x)dx}=e^{\ln x^4}=x^4$$

Multiplicando la ecuación diferencial por *I(x, y)*, encontramos

$$x^4y'+4x^3y=x^8$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left(yx^4\right)=x^8$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación con respecto a *x*, obtenemos

$$yx^4=\frac{1}{9}x^9+C$$

$$y=\frac{C}{x^4}+\frac{1}{9}x^5$$

8.4 Resolver y' + y = sen x.
Aquí *p(x)* = 1; por lo tanto $I(x,y)=e^{\int 1dx}=e^x$. Multiplicando la ecuación diferencial por I(x,y), obtenemos

$$e^xy'+e^xy=e^xsenx$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^x\right)=e^xsenx$$

Integrando ambos lados de la última ecuación con respecto a *x* (para integrar el lado derecho, usamos integración por partes dos veces) encontramos

$$ye^x=\frac{1}{2}e^x(senx-\cos x)+C$$

$$y=Ce^{-x}+\frac{1}{2}senx-\frac{1}{2}\cos x$$

8.5 Resolver *y' – 5y=0*
Solución:
Aquí *p(x)* = –5 e $I(x,y)=e^{\int(-5)dx}=e^{-5x}$. Multiplicando la ecuación diferencial por *l(x, y)*, obtenemos

$$e^{-5x}y' - 5e^{-5x}y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{-5x}\right) = 0$$

Integrando, obtenemos

$$ye^{-5x} = C$$

$$y = Ce^{5x}$$

Nótese que la ecuación diferencial también es separable y puede resolverse por el método del Tema 4.1. (Ver Problema 4.3).

8.6 Resolver el problema de valor inicial $y' + y = sen\, x;\ y(\pi) = 1$. Del Problema 8.4 la solución de la ecuación diferencial es

$$y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}senx - \frac{1}{2}\cos x$$

Aplicando la condición inicial directamente, obtenemos

$$1 = Ce^{-x} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ C = \frac{1}{2}e^{\pi}$$

Entonces $$y = \frac{1}{2}e^{\pi}e^{-x} + \frac{1}{2}senx - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{\pi}e^{-x} + senx - \cos x\right)$$

8.7 Resolver $y' + xy = xy^2$

Solución:

Esta ecuación no es lineal. Es, sin embargo, un caso especial de la *ecuación diferencial de Bernoulli*, $y' + p(x)y - q(x)y^n$, donde n es cualquier número real. En nuestra ecuación, $p(x) = x$, $q(x) = x$, $n = 2$. Para resolver la ecuación de Bernoulli, haga la sustitución $z = y^{1-n}$. La ecuación diferencial resultante será lineal y por lo tanto puede resolverse por el método de este tema.

Como $n = 2$ en la ecuación dada, hacemos la sustitución $z = y^{1-2} = y^{-1}$, de la cual se sigue

$$y = \frac{1}{z};\quad y' = -\frac{z'}{z^2}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación diferencial, obtenemos

$$-\frac{z}{z^2} + \frac{x}{z} = \frac{x}{z^2};\quad z' - xz = -x$$

Esta última ecuación es lineal. Resolviéndola por el método utilizado en este tema, encontramos $z = Ce^{x^2/2} + 1$.

La solución de la ecuación diferencial original es entonces

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{Ce^{x^2/2} + 1}$$

8.8 Resolver $y' - \frac{3}{x}y = x^4 y^{1/3} y$.

Solución:

Esta es una ***ecuación diferencial de Bernoulli*** con $p(x) = -\frac{3}{x}, q(x) = x^4, n = \frac{1}{8}$. Hacemos la sustitución $z = y^{1-(1/3)} = y^{2/3}$. Entonces $y = z^{3/2}, y' = \frac{3}{2}z^{1/2}z'$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{3}{2}z^{1/2}z' - \frac{3}{x}z^{3/2} = x^4 z^{1/2}$$
$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{2}{3}x^4$$

La solución de esta última ecuación, que es lineal, es $z = Cx^2 + \frac{2}{9}x^5$. Como $z = y^{2/3}$, la solución del problema original se da implícitamente por $y^{2/3} = Cx^2 + \frac{2}{9}x^5$ o explícitamente por $y = \pm\left(Cx^2 + \frac{2}{9}x^5\right)^{3/2}$

8.9 Halle la fórmula general de la solución de *(8.1)*.
Solución:
Multiplicando *(8.1)* por *(8.2)*, tenemos

(1) $$e^{\int p(x)dx}y' + e^{\int p(x)dx}p(x)y = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

Como
$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right] = e^{\int p(x)dx}p(x)$$
se sigue de la regla para la derivada de un producto que el lado izquierdo de *(1)* es igual a $\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right]$. Entonces, (*1*) puede escribirse como:
$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right] = e^{\int p(x)dx}q(x)$$
Integrando ambos lados de (2) con respecto a *x*, tenemos
$$\int \frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right]dx = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$
$$e^{\int p(x)dx}y + C_1 = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$
Finalmente, haciendo $C_1 = -C$ y resolviendo (3) para *y*, obtenemos
$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$

Problemas suplementarios

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial.

Problema	*Solución*
8.10 $y' - 7y = e^{x}$	$y = Ce^{7x} - \frac{1}{6}e^{x}$
8.11 $y' - 7y = 14x$	$y = Ce^{7x} - 2x - \frac{2}{7}$
8.12 $y' - 7y = sen\ 2x$	$y = Ce^{7x} - \frac{2}{53}\cos 2x - \frac{7}{53} sen 2x$
8.13 $y' + x^2 y = x^2$	$y = Ce^{-x^3/3} + 1$
8.14 $y' + \frac{2}{x}y = x;\ y(1) = 0$	$y = \frac{1}{4}\left(-x^{-2} + x^2\right)$
8.15 $y' + 6xy = 0$	$y = 5e^{-3\left(x^2 - \pi^2\right)}$
8.16 $y' - \frac{3}{x^2}y = \frac{1}{x^2}$	$y = Ce^{-3/x} - \frac{1}{3}$
8.17 $y' = \cos x$	$y = C + sen\ x$
8.18 $y' + 2xy = 2x^3$; $y(0) = 1$	$y = 2e^{-x^2} + x^2 - 1$
8.19 $y' + -y = y^2$	$\frac{1}{y} = Ce^{x} + 1$
8.20 $y' + xy = 6x\sqrt{y}$	$y = \left(Ce^{-x^2/4} + 6\right)^2$
8.21 $y' + \frac{2}{x}y = -x^9 y^5;\ y(-1) = 2$	$\frac{1}{y^4} = -\frac{31}{16}x^8 + 2x^{10}$