Tema 7. Factores de integración

7.1 ¿QUÉ ES UN FACTOR DE INTEGRACIÓN?

En general, la ecuación diferencial

(7.1) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

no es exacta. Ocasionalmente, sin embargo, es posible transformar *(7.1)* en una ecuación diferencial exacta por una atinada multiplicación.

Definición: Una función $I(x, y)$ es un *factor de integración* para *(7.1)* si la ecuación

(7.2) $I(x,y)[M(x,y)dx + N(x,y)dy] = 0$

es exacta.

Ejemplo 7.1. Determinar si $-1/x^2$ es un factor de integración para $ydx - xdy = 0$.
Solución:
Multiplicando la ecuación diferencial dada por $-1/x^2$, obtenemos

$$-\frac{1}{x^2}(ydx - xdy) = 0; \quad -\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy = 0$$

Esta ultima ecuación es exacta; por lo tanto $-1/x^2$ es un factor de integración.

Ejemplo 7.2. Determinar si $-1/xy$ es un factor de integración para $y\,dx - x\,dy$ – 0.
Solución:
Multiplicando la ecuación diferencial dada por $-1/xy$, obtenemos

$$-\frac{1}{xy}(ydx - xdy) = 0; \quad -\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0$$

Esta última ecuación es exacta; por lo tanto $-1/xy$ es un factor de integración.

Comparando con el Ejemplo 7.1, vemos que una ecuación diferencial puede tener más de un factor de integración.

7.2 SOLUCIÓN POR MEDIO DEL USO DE UN FACTOR DE INTEGRACIÓN

Si $I(x,y)$ es un factor de integración para *(7.1)*, entonces *(7.2)* es exacta y puede resolverse por el método de la Sección 6.2 , o frecuentemente, por integración directa. La solución de *(7.2)* es también la solución de *(7.1)*.

7.3 CÓMO HALLAR UN FACTOR DE INTEGRACIÓN

De la prueba de exactitud dada en la Sección 6.1 se deduce que el factor de integración es una solución para cierta ecuación diferencial parcial. Sin embargo, esta ecuación es generalmente más difícil de resolver que la ecuación diferencial original en consideración. En consecuencia, los factores de integración se obtienen generalmente por inspección.

El éxito del método depende entonces de la habilidad del usuario para reconocer o conjeturar que un grupo particular de términos forma una derivada exacta $dh(x,y)$.

Tabla 7–1

Grupo de Términos	Factor de Integración *I(x, y)*	Derivada Exacta *dh(x,y)*
ydx – xdy	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
ydx – xdy	$\frac{1}{y}$	$\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$
ydx – xdy	$-\frac{1}{xy}$	$\frac{xdy - ydx}{xy} = d\left(\ln\frac{y}{x}\right)$
ydx – xdy	$-\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\left(a\tan\frac{y}{x}\right)$
ydx – xdy	$\frac{1}{xy}$	$\frac{ydx - xdy}{xy} = d(\ln xy)$
ydx – xdy	$\frac{1}{(xy)^n}, \quad n > 1$	$\frac{ydx - xdy}{(xy)^n} = d\left(\frac{1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right)$
ydx – xdy	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{ydy - xdx}{x^2 + y^2} = d\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)$
ydx – xdy	$\frac{1}{\left(x^2 + y^2\right)^n}$	$\frac{ydy - xdx}{\left(x^2 + y^2\right)^n} = d\left(\frac{1}{2(n-1)\left(x^2 + y^2\right)^{n-1}}\right)$
aydx – bxdy *(a, b son constantes)*	$x^{a-1}y^{b-1}$	$x^{a-1}y^{b-1}(aydx + bxdy) = d\left(x^a y^b\right)$

En algunos casos, un factor de integración es fácilmente visible si los términos de la ecuación diferencial se agrupan estratégicamente. (Ver Problemas 7.3 – 7.5).

Si *M(x, y)* y *N(x,y)* en (7.7) obedecen ciertas condiciones, los factores de integración son conocidos.

(a) Si $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(x)$, una función de *x*; solamente, entonces

(7.3) $$I(x,y) = e^{\int g(x)dx}$$

(b) Si $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = h(y)$, una función de *y* solamente, entonces

(7.4) $$I(x,y) = e^{-\int h(y)dy}$$

(c) Si *M = yf(x,y)* y *N = xg(x,y),* entonces

(7.5) $$I(x,y) = \frac{1}{xM - yN}$$

Problemas resueltos

7.1 Resolver *ydx – xdy* = 0

Solución:

Usando el factor de integración $I(x,y) = -1/x^2$ (ver Ejemplo 7.1 o Tabla 7–1), podemos escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

Como *(I)* es exacto, puede resolverse por el método de la Sección 6.2. Como alternativa, vemos por la Tabla 7–1 que *(1)* puede escribirse como $d(y/x) = 0$. Entonces, por integración directa, tenemos $ylx = C$ o $y = Cx$, como la solución.

7.2 Resolver la ecuación diferencial del Problema 7.1 usando un factor de integración diferente.

Solución:

Usando el factor de integración $I(x,y) = -1/xy$ (ver Ejemplo 7.2 o Tabla 7–1), podemos escribir la ecuación diferencial como

$$\frac{xdy - ydx}{xy} = 0$$

Como *(I)* es exacto, puede resolverse por el método de la Sección 6.2. Como alternativa, vemos de la Tabla 7–1 que *(1)* puede escribirse como $d[\ln (y/x)] = 0$. Entonces, por integración directa,

$In\ (y/x) = C_1$. Tomando exponenciales a ambos lados, encontramos $\frac{y}{x} = e^{C_1}$, o finalmente

$$y = Cx \qquad (C = e^{C1})$$

7.3. Resolver $(y^2 - y)dx + x\, dy = 0.$

Solución:

No aparece inmediatamente ningún factor de integración. Nótese, sin embargo, que si los términos se vuelven a agrupar estratégicamente, la ecuación diferencial puede escribirse como

$$-(y\, dx - x\, dy) + y^2\, dx = 0$$

El grupo de términos dentro del paréntesis tiene muchos factores de integración (ver Tabla 7–1). Ensayando cada factor de integración por separado, encontramos que el único que hace exacta toda la ecuación es $I(x, y) = I/y^2$. Utilizando este factor de integración, podemos escribir lo anterior como

$$-\frac{ydx - xdy}{y^2} + 1dx = 0$$

Como esta ecuación es exacta, puede resolverse por el método de la Sección 6.2. Como alternativa vemos de la Tabla 7–1, que puede escribirse como $-d(x/y) + 1\, dx = 0$, o como $d(x/y) = 1dx$. Integrando, obtenemos la solución

$$\frac{x}{y} = x + C; \qquad y = \frac{x}{x + C}$$

7.4. Resolver $(y - xy^2)\, dx + (x + x^2y^2)\, dy = 0$, .

Solución:

No aparece inmediatamente ningún factor de integración. Nótese, sin embargo, que la ecuación diferencial puede escribirse como

$$(y\, dx + x\, dy) + (-xy^2\, dx + x^2y^2\, dy) = 0$$

El primer grupo de términos tiene muchos factores de integración (ver Tabla 7–1). Uno de estos factores, a saber $I(x, y) = 1/(xy)^2$, es un factor de integración para toda la ecuación. Multiplicando la ecuación anterior por $1/(xy)^2$, obtenemos

$$\frac{ydx + xdy}{(xy)^2} + \frac{-xy^2dx + x^2y^2dy}{(xy)^2} = 0$$

o su equivalente $$\frac{ydx+xdy}{(xy)^2}=\frac{1}{x}dx-1dy$$

De la Tabla 7–1, $$\frac{ydx+xdy}{(xy)^2}=d\left(\frac{-1}{xy}\right)$$

de manera que puede escribirse como

$$d\left(\frac{-1}{xy}\right)=\frac{1}{x}dx-1dy$$

Integrando ambos lados de esta última ecuación encontramos

$$-\frac{1}{xy}=ln|x|-y+C$$

que es la solución en forma implícita.

7.5 Resolver $y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}$

Solución:

Escribiendo la ecuación en forma diferencial, tenemos

$$(3yx^2)dx+(-x^3-2y^4)dy=0$$

No aparece inmediatamente ningún factor de integración. Sin embargo, podemos reagrupar esta ecuación como

$$x^2\,(3ydx-x\,dy)-2y^4dy=0 \quad {}^{o} \qquad (1)$$

El grupo entre paréntesis es de la forma *ay dx + bx dy*, donde *a = 3* y *b = –1*, que tiene un factor de integración x^2y^{-2}. Como la expresión entre paréntesis ya está multiplicada por x^2, ensayamos un factor de integración de la forma *I(x, y] = y* $^{-2}$. Multiplicando *(I)* por y^{-2}, tenemos

$$x^2y^{-2}\,(3ydx-x\,dy)-2y^2dy=0$$

que puede simplificarse (ver Tabla 7–1) en

$$d(x^3y^{-1})=2y^2dy=0 \qquad (2)$$

Integrando ambos lados de *(2)* tenemos como la solución en forma implícita.

7.*6* Resolver *y' = 2xy – x*

Solución:

Escribiendo esta ecuación en forma diferencial, tenemos

$$(-2xy+x)\,dx+dy=0 \qquad (1)$$

No aparece inmediatamente ningún factor de integración. Nótese, sin embargo, que para esta ecuación *M(x, y) = – 2xy + x; N(x,y)* = 1; de tal modo que

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{(-2x)-(0)}{1}=-2x$$

es una función de *x* solamente. Entonces, por (7.3) tenemos $I(x,y)=e^{\int -2xdx}=e^{-x^2}$ como un factor de integración. Multiplicando (1) por e^{-x^2} obtenemos

$$\left(-2xye^{-x^2}+xe^{-x^2}\right)dx+e^{-x^2}dy=0 \qquad (2)$$

que es exacto. Resolviendo *(2)* por el método de la Sección 6.2, obtenemos la solución como

$$y=Ce^{-x^2}+\frac{1}{2}$$

Nótese que la ecuación diferencial dada también es lineal. (En particular, ver Problema 8.2).

7.7 Resolver $y' = \frac{xy^2 - y}{x}$

Solución:

Escribiendo esta ecuación en forma diferencial, tenemos

$$y(1 - xy)\,dx + x(1)\,dy = 0 \qquad (1)$$

De (7.5) escogemos

$$I(x,y) = \frac{1}{x[y(1-xy)] - yx} = \frac{-1}{(xy)^2}$$

Multiplicando *(1)* por *I(x,y)*, obtenemos

$$\frac{xy - 1}{x^2 y}dx - \frac{1}{xy^2}dy = 0$$

que es exacta. Usando el método del Tema 6.2, encontramos que la solución es $y = -l/(x\ In|Cx|$ Nótese que hubiéramos podido escribir *(1)* como

$$(y\,dx + xdy) - xy^2\,dx = 0$$

que también sugiere (ver Tabla 7–1) el factor de integración $I(x, y) = 1/(xy\}^2$

7.8 Resolver $y^2dx + xydy = 0$

Solución:

Aquí $M(x, y) = y^2$; $N(x, y) = xy$; por lo tanto

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2y - y}{y^2} = \frac{1}{y}$$

una función de y solamente. De (7.4),. Multiplicando la ecuación diferencial dada por $I(x, y) = I/y$, obtenemos la ecuación exacta $y\ dx + x\ dy =$ O, que tiene la solución

Otro método sería dividir primero la ecuación diferencial dada por xy^2 y después ver que la ecuación resultante es separable.

Problemas suplementarios

En los problemas 7.9 – 7.23, halle un factor de integración adecuado para cada ecuación diferencial y resuélvala.

7.9 $(y + 1)\,dx - x\,dy = 0$ $\qquad I(x,y) = -\frac{1}{x^2}$; $\quad y = Cx - 1$

7.10 $y\,dx + (1 - x)\,dy = 0$ $\qquad I(x,y) = \frac{1}{y^2}$; $\quad Cy = x - 1$

7.11 $(x^2 + y + y^2)dx - xdy = 0$ $\qquad I(x,y) = -\frac{1}{x^2 + y^2}$; $\quad y = x\tan(x + C)$

7.12 $(y + x^3y^3)\,dx + x\,dy = 0$ $\qquad I(x,y) = \frac{1}{(xy)^3}$; $\quad \frac{1}{y^2} = 2x^2(x - C)$

7.13 $(y + x^4y^2)\,dx + x\,dy = 0$ $\qquad I(x,y) = \frac{1}{(xy)^2}$; $\quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3}x^4 - Cx$

7.14 $(3x^2y - x2)\,dx + dy = 0$ $\qquad I(x,y) = e^{x^3}$; $\quad y = Ce^{-x^3} + \frac{1}{3}$

7.15 $dx - 2xydy = 0$ $\qquad I(x,y) = e^{-y^2}$; $\quad y^2 = ln|kx|$

7.16 $2xydx + 3xdy = 0$ $\qquad I(x,y) = \frac{1}{y}$; $\quad y^2 = 2(C - x)$

7.17 $y\,dx + 3xdy = 0$ $\qquad I(x,y) = y^2$; $\quad y^3 = \frac{C}{x}$

7.18 $\left(2xy^2+\frac{x}{y^2}\right)dx+4x^2ydy=0$ $\qquad$ $I(x,y)=y^2;\quad x^2y^4+\frac{x^2}{2}=C$

7.19 $xy^2\,dx+(x^2y^2+x^2y)\,dy=0$ $\qquad$ $I(x,y)=\frac{1}{(xy)^2};\quad \ln|xy|=C-y$

7.20 $xy^2\,dx+x^2y\,dy=0$ $\qquad$ $I(x,y)=1;\quad \frac{1}{2}x^2y^2=C$

7.21 $(y+x^3+xy^2)\,dx-x\,dy=0$ $\qquad$ $I(x,y)=-\frac{1}{x^2+y^2};\quad y=x\tan\left(\frac{1}{2}x^2+C\right)$

7.22 $(x^3y^2-y)\,dx+(x^2y^4-x)\,dy=0$ $\qquad$ $I(x,y)=\frac{1}{(xy)^2};\quad 3x^3y+2xy^4+kxy=-6$

7.23 $3x^2y^2\,dx+(2x^3y+x^3y^4)\,dy=0$ $\qquad$ $I(x,y)=e^{y^3/3};\quad x^3y^2e^{y^3/3}=C$