Tema 6: Ecuaciones diferenciales exactas de primer orden

6.1 Definición

Una e.d.

(1) $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

Es exacta si existe una función *g(x,y)* tal que

(2) $dg(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$

Prueba de exactitud: Si *M(x,y)* y *N(x,y)* son funciones continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en algún rectángulo del plano *xy*, entonces (1) es exacto si, y solamente si,

(3) $$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Ejemplo 1. En la e.d. $2xy\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$, se tiene $M(x,y) = 2xy$ y $N(x,y) = 1 + x^2$. Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$, la ecuación diferencial es exacta.

6.2 Método de solución

Para resolver (1), asumiendo que es exacta, primero se resuelven las ecuaciones

(4) $$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

(5) $$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

para g(x,y). La solución de (1) se da implícitamente por:

(6) $g(x,y) = C$

donde *C* representa una constante arbitraria.

La ecuación (6) es inmediata de (1) y (2). De hecho, si (2) se sustituye en (1), se obtiene $dg(x,y(x)) = 0$. Integrando esta ecuación (nótese que puede escribirse 0 como dx), se tiene:

(7) $$\int dg(x,y(x)) = \int 0\,dx$$

que a su vez implica (6).

Problemas resueltos

1. Resolver $2xy\,dx + (1 + x^2)dy = 0$

   Solución:

   Esta ecuación es exacta. Ahora determinamos una función g(x,y) que satisface a (4) y (5). Sustituyendo $M(x,y) = 2xy$ en (4), obtenemos $\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy$. Integrando ambos lados de la ecuación con respecto de x encontramos:

$$\int \frac{\partial g}{\partial x}dx = \int 2xydx$$

$$g(x,y) = x^2 y + h(y)$$

Nota: al integrar con respecto de *x*, la constante (con respecto de x) de integración puede depender de *y*.

Ahora determinamos h(y). Derivando (1) con respecto de *y*, obtenemos $\frac{\partial g}{\partial x} = x^2 + h'(y)$

Sustituyendo esta ecuación, junto con $N(x,y) = 1 + x^2$ en (5), tenemos $x^2 + h'(y) = 1 + x^2$

$h'(y) = 1$

Integrando esta última ecuación con respecto de *y*, se obtiene $h(y) = y + C_1$ (C_1 = constante). Sustituyendo esta expresión en (1) tenemos

$$g(x,y) = x^2 y + y + C_1$$

La solución de esta ecuación diferencial, que está dada implícitamente por (6) como g(x,y) = C, es

$$x^2 y + y = C_2$$

$$C_2 = C - C_1$$

Resolviendo explícitamente para y obtenemos la solución como $y = \frac{C_2}{x^2 + 1}$

2. Resolver $(x + sen\ y)dx + (x \cos y - 2y)\ dy = 0$

Solución:

En este caso M(x,y) = x + sen y, y N(x,y) = x cos y – 2y. Entonces $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = \cos y$, y la e.d. es exacta. Ahora buscamos una función *g(x,y)* que satisfaga (4) y (5). Sustituyendo *M(x,y)* en (4), obtenemos $\frac{\partial g}{\partial x} = x + sen\ y$. Integrando ambos lados de esta ecuación con respecto de *x*, encontramos

$$\int \frac{\partial g}{\partial x}dx = \int (x + seny)dx$$

$$g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xseny + h(y)$$

Para encontrar *h(y)*, derivamos (1) con respecto a *y*, obteniendo $\frac{\partial g}{\partial x} = x\cos y + h'(y)$, y después sustituyendo este resultado junto con $N(x,y) = x \cos y - 2y$ en (5), encontramos:

$x \cos y + h'(y) = x \cos y - 2y$

$h'(y) = -2y$

de lo cual se sigue que $h(y) = -y^2 + C_1$. Sustituyendo este *h(y)* en (1) se obtiene

$$g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xseny + -y^2 + C_1$$

La solución de la ecuación diferencial está dada implícitamente por (6) como

$$\frac{1}{2}x^2 + xseny - y^2 = C_2 \qquad (C_2 = C - C_1)$$

3. Resolver $(xy + x^2)\ dx + (-1)\ dy = 0$

Solución:

Aquí, $M(x,y) = xy + x^2$ y $N(x,y) = -1$; entonces $\frac{\partial M}{\partial y} = xy + x^2, \frac{\partial N}{\partial x} = -1$, entonces $\frac{\partial M}{\partial y} = x, \frac{\partial N}{\partial x} = 0$. Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación NO es exacta y el método visto aquí no es aplicable.

4. Resolver $y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$

Solución:
Escribiendo esta ecuación en forma diferencial:

$$(2 + ye^{xy})\, dx + (xe^{xy} - 2y) = 0$$

Aquí $M(x,y) = 2 + ye^{xy}$ y $N(x,y) = xe^{xy} - 2y$ y, como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy}$, la e.d. es exacta.

Sustituyendo M(x,y) en (4), encontramos $\frac{\partial g}{\partial x} = 2 + ye^{xy}$; luego, integrando con respecto a x, obtenemos

$$\int \frac{\partial g}{\partial x} dx = \int \left(2 + ye^{xy}\right) dx$$

$$g(x,y) = 2x + e^{xy} + h(y)$$

Para encontrar h(y) primero derivamos (1) con respecto a y, obteniendo $\frac{\partial g}{\partial y} = xe^{xy} + h'(y)$; después reemplazamos este resultado junto con $N(x,y)$ en (5):

$$xe^{xy} + h'(y) = xe^{xy} - 2y$$

$$h'(y) = -2y$$

De donde $h(y) = -y^2 + C_1$. Sustituyendo esta $h(y)$ en (1) obtenemos

$$G(x,y) = 2x + e^{xy} - y^2 + C_1$$

La solución de la ecuación diferencial se da implícitamente por (6) como

$$2x + e^{xy} - y^2 = C_2$$

$$C_2 = C - C_1$$

5. Resolver $y' = \frac{-2xy}{1 + x^2}$, $y(2) = -5$

La solución de la e.d. (escrita en forma diferencial se da en el problema 1 como $x^2y + y = C_2$. Usando la condición inicial, obtenemos $(2)^2(-5) + (-5) = C_2$, o bien $C_2 = -25$. La solución del problema de valor inicial es, por lo tanto $x^2y + y = -25, y = \frac{-25}{\left(x^2 + 1\right)}$

Problemas suplementarios

Hallar la exactitud de las siguientes e.d. y resolver todas las que sean exactas.

6. $(2xy + x)\, dx + (x^2 + y)\, dy = 0$ $\qquad yx^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C_2$

7. $(y + 2xy^3)\,dx + (1 + 3x^2y^2 + x)\,dy = 0$ $xy + x^2y^3 + y = C_2$
8. $ye^{xy}\,dx + xe^{xy}\,dy = 0$ $e^{xy} = C_2$
9. $xe^{xy}\,dx + ye^{xy}\,dy = 0$ *no exacta*
10. $3x^2y^2\,dx + (2x^3y + 4y^3)\,dy = 0$ $x^3y^2 + y^4 = C_2$
11. $y\,dx + x\,dy = 0$ $xy = C_2$
12. $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$ *no exacta*
13. $(y\,\text{sen}x + xy\cos x)\,dx + (x\,\text{sen}x + 1)\,dy = 0$ $xy\,\text{sen}x + y = C_2$