Tema 5: Ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneas

5.1 Primer método de solución

En la e.d. homogénea

(1) $$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

donde, de acuerdo con lo visto en (3.3), *f(tx, ty) =f(x, y)*, se sustituye

(2) $$y = xv$$

y su correspondiente derivada:

(3) $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

Después de simplificar, la ecuación diferencial resultante será de variable separable (*v* y *x*), que puede resolverse por los métodos dados en el tema 4. La solución para (1) requerida se obtiene haciendo de nuevo el cambio de variable.

5.2 Método alterno de solución

Transformando la e.d. en:

(4) $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$$

y después sustituyendo

(5) $$x = yu$$

y su correspondiente derivada

(6) $$\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$$

en (4). Después de simplificar la e.d. resultante, será de variable separable (en este caso *u,y*), que puede resolverse por los métodos vistos en el tema 4. La solución requerida para (4) se obtiene entonces haciendo de nuevo el cambio de variable.

Como cualquier método de solución requiere resolver una e.d. separable asociada, la discusión del tema 4 cobra importancia. Generalmente es indistinto el método de solución que se use. En otras ocasiones, una de las sustituciones (2 o 5) es definitivamente mejor que la otra. En estos casos, la mejor sustitución es visible generalmente por la forma de la ecuación diferencial en sí misma.

Problemas resueltos

1. Resolver $y' = \dfrac{y+x}{x}$

   Solución:

   Sustituyendo (2) y (3) en la e.d., obtenemos:

   $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{xv + x}{x}$$

   que puede simplificarse algebraicamente en

$$x\frac{dv}{dx}=1, \frac{1}{x}dx-dv=0$$

Esta última ecuación es separable. Su solución es

(1) $$v=ln|x|-C \therefore v=ln|kx|$$

donde se tiene *C* = – *ln* |*k*|, notando que *ln* |*x*| + *ln* |*k*| = *ln* |*kx*|. Finalmente, sustituyendo *v* = *y/x* en (1), obtenemos la solución de la ecuación diferencial dada que es *y* = *x ln* |*kx*|.

2. Resolver $y'=\frac{2y^4+x^4}{xy^3}$

Solución:

Sustituyendo (2) en (3) en la e.d. obtenemos

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{2(xv)^4+x^4}{x(xv)^3}$$

que puede simplificarse algebraicamente en

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^4+1}{v^3}, \frac{1}{x}dx-\frac{v^3}{v^4+1}dv=0$$

Esta última ecuación es separable, su solución es

(1) $$ln|x|-\frac{1}{4}ln\left(v^4+1\right)=C \therefore v^4+1=(kx)^4$$

donde se tiene *C* = – *ln* |*k*|, y luego se usan las identidades *ln* |*x*| + *ln* |*k*| = *ln* |*kx*|, *4 ln* |*kx*| = *ln* $(kx)^4$.

Finalmente, sustituyendo *v* = *y/x* en (1), obtenemos la solución de la ecuación diferencial dada que es

(2) $$y^4=C_1x^8-x^4, \quad \left(C_1=k^4\right)$$

3. Resolver la ecuación diferencial del problema anterior usando las ecuaciones (4, 5 y 6)

Solución:

Primero transformamos la e.d. en

$$\frac{dx}{dy}=\frac{xy^3}{2y^4+x^4}$$

Luego, sustituyendo (5) y (6) en esta nueva e.d. se obtiene

$$u+y\frac{du}{dy}=\frac{(yu)y^3}{2y^4+(yu)^4}$$

que puede simplificarse algebraicamente en

$$y\frac{du}{dy}=-\frac{u+u^5}{2+u^4}, \quad \frac{1}{y}dy+\frac{2+u^4}{u+u^5}du=0$$

Esta última ecuación es separable; usando fracciones parciales

$$\frac{2+u^4}{u+u^5}=\frac{2+u^4}{u\left(1+u^4\right)}=\frac{2}{u}-\frac{u^3}{1+u^4}$$

obtenemos

$$ln|y|+2\,ln|u|-\frac{1}{4}ln\left|1+u^4\right|=C$$

que puede escribirse como

(1) $$ky^4u^8 = 1 + u^4$$

donde $C = -1/4 \ ln \ |k|$, reemplazando $u = x/y$, ver (6) en (1), se tiene de nuevo (2) del problema 2.

4. Resolver $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

Solución:

Sustituyendo (2) y (3) en la e.d. tenemos

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2x(xv)}{x^2 - (xv)^2}$$

que puede simplificarse algebraicamente en

(1) $$x\frac{dv}{dx} = -\frac{v(v^2+1)}{v^2-1}, \qquad \frac{1}{x}dx + \frac{v^2-1}{v(v^2+1)}dv = 0$$

Usando fracciones parciales, se puede desarrollar (1) en

$$\frac{1}{x}dx + \left(-\frac{1}{v} + \frac{2v}{(v^2+1)}\right)dv = 0$$

La solución de esta ecuación separable es $ln \ |x| - ln \ |v| + ln \ (v^2+1) = C$, que puede simplificarse en

(2) $$x(v^2 + 1) = kv, \qquad (C = ln \ |k|)$$

Sustituyendo $v = y/x$ en (2), encontramos la solución de la e.d. dada que es

$$x^2 + y^2 = ky$$

5. Resolver $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

Solución:

Sustituyendo (2) y (3) en la e.d. tenemos

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + (xv)}{x(xv)}$$

que puede simplificarse algebraicamente en

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}, \qquad \frac{1}{x}dx + vdv = 0$$

La solución de esta ecuación separable es $ln \ |x| - v^2/2 = C$, que puede simplificarse en

(1) $$v^2 = ln \ x^2 + k, \qquad (-2C = k)$$

Sustituyendo $v = y/x$ en (1), encontramos la solución de la e.d. dada que es

$$y^2 = x^2 \ ln \ x^2 + kx^2$$

6. Resolver $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}; y(1) = -2$

Solución:

La solución de la e.d. se da en el problema anterior como $y^2 = x^2 \ ln \ x^2 + kx^2$

Aplicando la condición inicial, obtenemos $(-2)^2 = (1)^2 \ln (1)^2 + k(1)^2$, o $k = 4$. Entonces la solución para el problema de valor inicial es

$$y^2 = x^2 \ln x^2 + 4x^2$$

de donde

$$y = -\sqrt{x^2 \ln x^2 + 4x^2}$$

Se toma la raíz cuadrada negativa, de acuerdo con la condición inicial.

7. Resolver $y' = \dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}}$

Solución:

Notando el término *(x/y)* en el exponente, usamos la sustitución $u = x/y$, que es una forma equivalente de (5). Escribiendo la e.d. como:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}}{2xye^{(x/y)^2}}$$

Tenemos al usar las sustituciones (5) y (6) y simplificar,

$$y\frac{du}{dy} = \frac{1+e^{u^2}}{2ue^{u^2}}, \quad \frac{1}{y}dy - \frac{2ue^{u^2}}{1+e^{u^2}}du = 0$$

Esta última ecuación es separable;

$$\ln|y| \ \ln\left(1+e^{u^2}\right) = C$$

que puede escribirse como

(1) $$y = k\left(1+e^{u^2}\right), \quad \left(C = \ln|k|\right)$$

Sustituyendo $u = x/y$ en (1), obtenemos la solución de la ecuación diferencial dada como

$$y = k\left(1+e^{(x/y)^2}\right)$$

8. Demostrar que si $y' = f(x,y)$ es homogénea, entonces la e.d. puede escribirse como $y' = g(y/x)$, donde $g(y/x)$ depende solamente del cociente y/x.

Solución:

Por la propiedad (4) tenemos que $f(x,y) = f(tx,ty)$. Como esta ecuación es válida para todos los t, debe ser válida en particular para t = 1/x. Entonces f(x,y) = f(1,y/x). Si definimos ahora $g(x/y) = f(1,y/x)$, tenemos $y' = f(x,y) = f(1,y/x) = g(y/x)$ como se pide.

Nota: esta forma sugiere la sustitución $v = y/x$ que es equivalente a la expresión (2). Si arriba se hubiera puesto $t = 1/y$, entonces $f(x,y) = f(x/y,1) = h(x/y)$, que sugiere la sustitución alterna (5).

9. Una función $g(y/x)$ es homogénea de grado n si $g(tx,ty) = tn\ g(y/x)$ para cualquier t. Determine si las siguientes funciones son homogéneas y, si no lo son, halle su grado:

   a) $xy + y^2$

   Solución:

   $(tx)(ty) + (ty)^2 = t^2(xy + y^2)$; homogénea de grado 2

   b) $x + y \operatorname{sen} (y/x)^2$

   Solución:

$$tx + tysen\left(\frac{ty}{tx}\right)^2 = t\left[x + ysen\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]$$ homogénea de grado 1

c) $x^3 + xy^2e^{X/Y}$

Solución:

$$(tx)^3 + (tx)(ty)^2 e^{tx/ty} = t^3\left(x^3 + xy^2e^{x/y}\right)$$ homogénea de grado 3

d) $x + xy$

Solución:

tx + (tx)(ty) = tx + t^2xy   no homogénea

10. Otra definición de e.d. homogénea es como sigue: Una e.d. *M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0* es homogénea si tanto *M(x,y)* como *N(x,y)* son homogéneas del mismo grado. Demuestre que esta definición implica la definición dada en el tema 3.

Solución:

$$f(tx,ty) = \frac{M(tx,ty)}{-N(tx,ty)} = \frac{t^nM(x,y)}{-t^nN(x,y)} = \frac{M(x,y)}{-N(x,y)} = f(x,y)$$

Problemas propuestos

En los siguientes problemas, determine si las ecuaciones diferenciales dadas son homogéneas y, si lo son, resuélvalas.

11. $y' = \frac{y-x}{x}$ $y = x\,ln|k/x|$
12. $y' = \frac{2y+x}{x}$ $y = kx^2 - x$
13. $y' = \frac{x^2+2y^2}{xy}$ $y^2 = kx^4 - x^2$
14. $y' = \frac{2x+y^2}{xy}$ no homogénea
15. $y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$ $y^2 = x^2 - kx$
16. $y' = \frac{2xy}{y^2-x^2}$ $3yx^2 - y^3 = k$
17. $y' = \frac{y}{x+\sqrt{xy}}$ $-2\sqrt{x/y} + ln|y| = C$
18. $y' = \frac{y^2}{xy+(xy^2)^{1/3}}$ no homogénea
19. $y' = \frac{x^4+3x^2y^2+y^4}{x^3y}$ $y^2 = -x^2\left(1 + \frac{1}{ln|kx^2|}\right)$