Tema 4. Ecuaciones diferenciales separables de primer orden

4.1 Solución General

Considere la ecuación diferencial separable de primer orden

(1) $A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$

Como se mostrará en el problema 8, la solución es:

(2) $$\int A(x)dx + \int B(y)dy = C$$

Donde *C* representa una constante arbitraria.

Las integrales obtenidas en (2) pueden ser, para propósitos prácticos, imposibles de evaluar. En ese caso pueden usarse técnicas numéricas para obtener resultados aproximados. Aún si las integrales indicadas en (2) pudieran realizarse, puede no ser algebraicamente posible resolver explícitamente para *y* en términos de *x*. En este caso la solución se deja en forma implícita.

4.2 Problemas de valor inicial

La solución de problemas de valor inicial

(3) $A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0; \qquad y(x_0) = y_0$

puede obtenerse fácilmente, usando primero (2) para resolver la ecuación diferencial y después aplicando la condición inicial directamente para calcular *C*.

Como alternativa, la solución (3) puede obtenerse de

(4) $$\int_{x_0}^{x} A(x)dx + \int_{y_0}^{y} B(y)dy = 0$$

Sin embargo, la ecuación (4) puede no determinar la solución de (3) únicamente; es decir, (4) puede tener muchas soluciones, solamente una de las cuales satisface el problema de valor inicial.

Problemas resueltos

1. Resolver $x\,dx - y^2\,dy = 0$

   Solución:

   Para esta e.d. $A(x) = x$, $B(y) = -y^2$. Sustituyendo esos valores en (2):

   $$\int (x)dx + \int \left(-y^2\right)dy = C$$

   Que después de realizar las integrales indicadas, se convierte en $x^2/2 - y^3/3 = C$. Resolviendo explícitamente para y, obtenemos la solución

   $$y = \left(\frac{3}{2}x^2 + k\right)^{1/3}, k = -3C$$

2. Resolver $y' = y^2 x^3$

   Solución:

   Primero transformamos esta ecuación en la forma diferencial $x^3dx - (1/y^2)\,dy = 0$.

   Entonces $A(x) = x^3$, $B(y) = -1/y$. Sustituyendo estos valores en (2):

   $$\int x^3 dx + \int \left(-1/y^2\right)dy = C$$

   Efectuando las integrales, $x^4/4 + 1/y = C$. Resolviendo para y obtenemos la solución

   $$y = \frac{-4}{x^4 + k'} \qquad k = -4e$$

3. Resolver $y' = 5y$

Solución:

Primero se transforma esta ecuación en la forma diferencial $5dx - (1/y)\,dy = 0$.

Entonces $A(x) = 5,\ B(y) - 1/y$. Sustituyendo estos resultados en (2) obtenemos:

$$\int 5\,dx + \int (-1/y)\,dy = C$$

O por evaluación, $5x - ln|y| = C$

Para resolver explícitamente para *y*, lo primero es transformar la solución en $ln|y| = 5x - C$ y después tomamos exponenciales a ambos lados. Entonces $e^{ln|y|} = e^{5x-C}$. Teniendo en cuenta que $e^{ln|y|} = |y|$ obtenemos $|y| = e^{5x}e^{-C},\ y = \pm e^{-C}e^{5x}$. La solución se da explícitamente como $y = ke^{5X}$, $k = \pm e^{-C}$

Nótese que la presencia del término $(-1/y)$ en la forma diferencial de la ecuación diferencial requiere la restricción $y \neq 0$ en la derivada de la solución. Esta restricción es equivalente a la restricción $k \neq 0$, porque $y = ke^{5X}$. Sin embargo, por inspección, $y = 0$ es una solución de la ecuación diferencial en su forma original. Entonces, $y = ke^{5X}$ es la solución para todos los *k*.

La ecuación diferencial en su forma original también es lineal.

4. Resolver $y' = \dfrac{x+1}{y^4+1}$

Solución:

Esta ecuación en su forma diferencial es $(x + 1)\,dx + (-4y^4 - 1)\,dy = 0$. Entonces $A(x) = x + 1,\ B(y) = -y^4 - 1$.

La solución se da por (2) implícitamente como:

$$\int (x+1)\,dx + \int \left(-y^4 - 1\right)dy = C$$

O por evaluación: $\dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{y^5}{5} - y = C$

Como es imposible resolver algebraicamente esta ecuación explícitamente para y, la solución debe dejarse en forma implícita.

5. Resolver $e^X dx - y\,dy = 0;\ y(0) = 1$

Solución:

La solución para la e.d. está dada por (2) como:

$$\int e^x dx + \int (-y)\,dy = C$$

Por evaluación: $y^2 = 2e^X + k,\ k = -2C$. Aplicando la condición inicial, obtenemos $(1)^2 = 2e^0 + k,\ k = -1$. Entonces, la solución al problema de valor inicial es $y^2 = 2e^x - 1, y = \sqrt{2e^x - 1}$

Nota: no podemos escoger la raíz negativa, porque entonces $y(0) = -1$, lo cual contradice la condición inicial.

Para asegurarse de que *y* permanezca real, debemos restringir *x* de tal manera que $2e^X - 1 \geq 0$. Para garantizar que *y'* exista (nótese que $y'(x) = dy/dx = e^X/y$), debemos restringir *x* de tal modo que $2e^X - 1 \neq 0$. Estas condiciones juntas implican que $2e^X - 1 > 0$, o que $x > ln\ ½$.

6. Usar la ecuación (4) para resolver el problema 5.

Solución:

Para este problema $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ A(x) = e^X,\ B(y) = -y$. Sustituyendo estos valores en (4) obtenemos:

$$\int_0^x e^x dx + \int_1^y (-y)\,dy = 0$$

Evaluando estas integrales tenemos:

$$e^{x}\Big|_{0}^{x} + \left(\frac{-y^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{y} = 0, \quad e^{x} - e^{0} + \left(\frac{-y^2}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

Entonces $y^2 = 2e^X - 1$, y como en el problema 5, $y = \sqrt{2e^x - 1}, x > ln\frac{1}{2}$

7. Resolver $x \cos x\, dx + (1 - 6y^5)\, dy = 0;\ y(\pi) = 0$

Solución:

Aquí $x_0 = \pi$, $y_0 = 0$, $A(x) = x \cos x$, $B(y) = 1 - 6y^5$. Reemplazando estos valores en *(4)*, tenemos.

$$\int_{\pi}^{x} x\cos x dx + \int_{0}^{y}\left(1 - 6y^5\right)dy = 0$$

Evaluando estas integrales (la primera por integración por partes, tenemos:

$$xsenx\Big|_{\pi}^{x} + \cos x\Big|_{\pi}^{x} + \left(y - y^6\right)\Big|_{0}^{y} = 0$$

$$xsenx + \cos x + 1 = y^6 - y$$

Como no se puede resolver esta última ecuación explícitamente para y debemos limitarnos a la solución en la presente forma implícita.

8. Demuestre que cualquier solución de (1) satisface (2).

Solución:

Transforme (1) en $A(x) + B(y)y' = 0$. Si $y(x)$ es una solución, debe satisfacer esta ecuación para todos los x; por lo tanto

$$A(x) + B[y(x)]y'(x) = 0$$

Integrando a ambos lados de esta ecuación, con respecto a x obtenemos:

$$\int A(x)dx + \int B[y(x)]y'(x)dx = 0$$

En la segunda ecuación se hace el cambio de variable $y = y(x)$, entonces $dy = y'(x)\, dx$. El resultado de esta sustitución es (2).

9. Demuestre que cualquier solución de (3) es una solución para (4)

Solución:

Siguiendo el mismo razonamiento del problema anterior, pero integrando ahora de $x = x_0$ a $x = x$, obtenemos:

$$\int_{x_0}^{x} A(x)dx + \int_{x_0}^{x} B[y(x)]y'(x)dx = 0$$

La sustitución produce nuevamente el resultado deseado. Nótese que mientras x varía de x0 a x, y varía de $y(x_0) = y_0$ a $y(x) = y$

Problemas propuestos

10. Resolver $x\, dx + y\, dy = 0$ — $y = \pm\sqrt{k - x^2}, k = 2C$
11. Resolver $1/x\, dx - 1/y\, dy = 0$ — $y = kx, k = \pm e^{-C}$
12. Resolver $1/x\, dx + y\, dy = 0$ — $y = ln\left|\frac{k}{x}\right|, e = ln|k|$
13. Resolver $x\, dx + 1/y\, dy = 0$ — $y = ke^{-x^2/2}, k = \pm e^{C}$
14. Resolver $(x^2 + 1)\, dx + (y^2 + y)\, dy = 0$ — $2x^3 + 6x + 2y^3 + 3y^2 = k,\ k = 6C$
15. Resolver $sen\, x\, dx + y\, dy = 0;\ y(0) = -2$ — $y = -\sqrt{2 + 2\cos x}$

16. Resolver $(x^2 + 1)\,dx + 1/y\,dy = 0$ $\qquad y = e^{-1/3\left(x^3+3x+4\right)}$

17. Resolver $xe^x dx + (y^5 - 1)\,dy = 0;\ y(0) = 0$ $\qquad \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{6}y^6 - y = \frac{1}{2}$

18. Transformar las siguientes ecuaciones diferenciales en las formas diferenciales que sean separables y después resolver:

a) $y' = y/x^2$ $\qquad \frac{1}{x^2 dx} - \frac{1}{y}dy = 0;\ y = ke^{-1/x},\ k = \pm e^{-C}$

b) $y' = xe^x/2y$ $\qquad xe^x dx - 2y\,dy = 0;\ y = \pm\sqrt{xe^x - e^x - e}$

c) $y' = \dfrac{x^2 - y}{y+1}$; $y(3) = -1$ $\qquad \left(x^2 - 1\right)dx - \left(1 + \frac{1}{y}\right)dy = 0;\ \frac{x^3}{3} - x - y - \ln|y| = 7$