Tema 3

3. Clasificación de las ecuaciones diferenciales de primer orden

3.1 Forma estándar y forma diferencial

La forma estándar de una ecuación diferencial de primer orden es:

(1) $$y' = f(x, y)$$

Ejemplo 1. Para la ecuación diferencial $y' = -y + sen\, x$, tenemos que $f(x, y) = -y + sen\, x$. Para $y' = 3yx^2/(x^3 + y^4)$, $f(x, y) = 3yx^2/(x^3 + y^4)$. La e.d. $e^X y' + e^{2X} y = sen\, x$ no se da en su forma estándar, pero puede transformarse en ella, resolviéndola algebraicamente para y'. Entonces $e^X y' = -e^{2X} y + sen\, x$ o bien, $y' = f(x, y) = -e^X y + e^{-X} sen\, x$.

Teorema 1.

Si $f(x, y)$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son continuos en el rectángulo $\Re$: $|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b$ entonces existe un intervalo alrededor de x_0 en el cual el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ tiene una solución única.

La función $f(x, y)$ dada en el ejemplo anterior siempre puede escribirse como el cociente de otras dos funciones $M(x, y)$ y $-N(x, y)$. El signo menos se usa únicamente por conveniencia. Entonces, recordando que $y' = dy/dx$ podemos escribir a (1) como $dy/dx = M(x, y)/-N(x, y)$, que es equivalente a la forma diferencial:

(2) $$M(x, y)\, dx + N(x, y) dy = 0$$

Ejemplo 2. Dada una función $f(x, y)$, hay infinitas formas de descomponerla en un cociente de otras dos funciones. Por ejemplo, si $f(x, y) = (x + y)/y^2$ entonces hay cuatro posibles descomposiciones que son:

a) $M(x, y) = x + y$, $N(x, y) = -y^2$
$$\frac{M(x,y)}{-N(x,y)} = \frac{x+y}{-\left(-y^2\right)} = \frac{x+y}{y^2}$$

b) $M(x, y) = -1$, $N(x, y) = y^2/(x + y)$
$$\frac{M(x,y)}{-N(x,y)} = \frac{-1}{-y^2/x+y} = \frac{x+y}{y^2}$$

c) $M(x, y) = (x + y)/2$, $N(x, y) = -y^2/2$
$$\frac{M(x,y)}{-N(x,y)} = \frac{(x+y)/2}{y^2/2} = \frac{x+y}{y^2}$$

d) $M(x, y) = (-x - y)/x^2$, $N(x, y) = y^2/x^2$
$$\frac{M(x,y)}{-N(x,y)} = \frac{(-x-y)/x^2}{-y^2/x^2} = \frac{x+y}{y^2}$$

Es importante enfatizar que muchas de las e.d. no caen en, y no pueden ser transformadas en ninguna de estas categorías. Para estas e.d. generalmente existen técnicas no analíticas que permitan llegar a la solución aproximada.

2. Ecuaciones lineales

Considere una e.d. en la forma estándar (1). Si $f(x, y)$ puede escribirse como $f(x,y) = -p(x)y + q(x)$ la ecuación es lineal. Las e.d. lineales de primer orden pueden escribirse siempre como

(3) $y' = p(x)y = q(x)$

La ecuación anterior es un caso especial de la ecuación 1-6, con $n = 1$, $p(x) = b_0(x)/b_1(x)$, $q(x) = g(x)/b_1(x)$.

3. Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial en forma estándar es homogénea si:

(4) $f(tx, ty) = f(x, y)$

Para cualquier valor real t.

Nota: Únicamente en las e.d. de primer orden, la palabra "homogénea" tiene el significado definido anteriormente.

4. Ecuaciones separables

Considere una ecuación diferencial en la forma diferencial (2). Si M(x, y) = A(x) (una función solamente de x) y N(x, y) = B(y), la e.d. es separable o tiene sus variables separadas.

5. Ecuaciones exactas

Una e.d. en la forma diferencial (2) es exacta si:

(5) $$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Problemas resueltos

1. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales:
   (a) $y' = (\text{sen } x)y + e^X$ — Es lineal, $p(x) = -\text{sen } x$, $q(x) = e^X$
   (b) $y' = x \text{ sen } y + e^X$ — No es lineal, a causa del término *sen y*
   (c) $y' = 5$ — Es lineal, $p(x) = 0$, $q(x) = 5$
   (d) $y' = y^2 + x$ — No es lineal, a causa del término y^2
2. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas:

(a) $y' = \frac{y+x}{x}$

Solución: La ecuación es homogénea porque

$$f(tx,tx) = \frac{ty+tx}{tx} = \frac{t(y+x)}{tx} = \frac{y+x}{x} = f(x,y)$$

(b) $y' = \frac{y^2}{x}$

Solución: La ecuación no es homogénea porque

$$f(tx,tx) = \frac{(ty)^2}{tx} = \frac{t^2y^2}{tx} = t\frac{y^2}{x} \neq f(x,y)$$

(c) $y' = \dfrac{2xye^{x/y}}{x^2 + y^2 sen\left(\dfrac{x}{y}\right)}$

Solución: La ecuación es homogénea porque

$$f(tx,tx) = \frac{2ty * txe^{tx/ty}}{(tx)^2 + (ty)^2 sen\frac{tx}{ty}} = \frac{t^2 2xye^{x/y}}{t^2x^2 + t^2y^2 sen\frac{x}{y}} = \frac{2xye^{x/y}}{x^2 + y^2 sen\frac{x}{y}} = f(x,y)$$

(d) $y' = \dfrac{x^2 + y}{x^3}$

Solución: La ecuación no es homogénea porque

$$f(tx,tx) = \frac{(ty)^2 + ty}{(tx)^3} = \frac{t^2x^2 + ty}{t^3x^3} = \frac{tx^2 + y}{t^2x^3} \neq f(x,y)$$

3. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son separables:
   (a) $sen\ x\ dx + y^2\ dy = 0$ — Es separable, $M = A(x) = sen\ x$, $N = B(y) = y^2$
   (b) $xy^2\ dx - x^2y^2 dy = 0$ — No es separable, ya que $M = xy^2$ no es función sólo de x. Pero si dividimos ambos lados de la ecuación por x^2y^2, obtenemos la ecuación $(1/x)dx + (-1)dy = 0$, que es separable. Así, $A(x) = 1/x$, $B(y) = -1$
   (c) $(1 + xy)dx + ydy = 0$ — No es separable, ya que $M = 1 + xy$

4. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas:
   (a) $3x^2ydx + (y + x^3)dy = 0$ — Es exacta, $M = 3x^2y$, $N = y + x^3$, $\therefore\ \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$
   (b) $xydx + y^2dy = 0$ — No es exacta, $M = xy$, $N = y^2$, $\therefore\ \dfrac{\partial M}{\partial y} = x, \dfrac{\partial N}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$

5. Demuestre que una ecuación separable es siempre exacta.

Solución:

Para una e.d. separable, $M = A(x)$, $N = B(y)$. Entonces:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial A(x)}{\partial x} = 0, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial B(y)}{\partial x} = 0$$

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, la e.d. es exacta.

6. El problema de valor inicial $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ tiene las dos soluciones $y = x|x|, y = 0$. ¿Está este resultado de acuerdo con el Teorema 1?

Solución:

No. En este caso, f(x, y) = $2\sqrt{|y|}$, y por lo tanto $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no existe en el origen.

Problemas propuestos

Las siguientes e.d. de primer orden se dan en forma estándar y en forma diferencial. Determinar si las ecuaciones en forma estándar son lineales y/u homogéneas y si las ecuaciones en forma diferencial son separables y/o exactas.

1.	$y' = xy;$	$xy\,dx - dy = 0$	lineal
2.	$y' = xy;$	$x\,dx - 1/y\,dy = 0$	lineal, separable y exacta
3.	$y' = xy + 1;$	$(xy + 1)\,dx - dy = 0$	lineal
4.	$y' = x^2/y^2;$	$x^2/y^2\,dx - dy = 0$	homogénea
5.	$y' = x^2/y^2;$	$-x^2\,dx - y^2\,dy = 0$	homogénea, separable y exacta
6.	$y' = -2y/x\,;$	$2xy\,dx + x^2\,dy = 0$	lineal, homogénea y exacta
7.	$y' = xy^2/(x^2y + y^3);$	$xy^2\,dx + (x^2y + y^3)\,dy = 0$	homogénea
8.	$y' = -xy^2/(x^2y + y^3);$	$xy^2\,dx + (x^2y + y^2)\,dy = 0$	exacta