Tema 2 Soluciones de Ecuaciones Diferenciales

2.1 Definición de Soluciones

Una solución para una ecuación diferencial en la variable desconocida *y,* y la variable independiente *x* en el intervalo ی es una función *y (x)* que satisface la ecuación diferencial para todos los valores de x en ی.

Ejemplo 1.

¿Es $y(x) = C_1 \, sen\ 2x + C_2 \cos 2x$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, una solución para $y'' + 4y = 0$?

Solución:

Derivando y encontramos:

$y' = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \, sen\ 2x$ $\qquad$ $y'' = -4C_1 \, sen\ 2x - 4C_2 \cos 2x$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y'' + 4y'' &= (-4C_1 \, sen\ 2x - 4C_2 \cos 2x) + 4(C_1 \, sen\ 2x + C_2 \cos 2x) \\ &= (-4C_1 + 4C_1) \, sen\ 2x + (-4C_2 + 4C_2) \cos 2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así $y(x) = C_1 \, sen\ 2x + C_2 \cos 2x$ satisface la ecuación diferencial para todos los valores de x, y es una solución en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 2.

Determinar si $y = x^2 - 1$ es una solución de $(y')^4 + y^2 = -1$.

Solución:

Puede verse que el lado izquierdo de la igualdad en la ecuación diferencial debe ser no negativo para cualquier función *y(x)* y cualquier *x*, puesto que es una suma de términos elevados a la segunda y cuarta potencias, mientras que el lado derecho de la ecuación es negativo. Como ninguna función *y(x)* puede satisfacer esta condición, la ecuación diferencial dada no tiene solución.

Como se vio, algunas ecuaciones diferenciales tienen un número infinito de soluciones (ejemplo 1), mientras que otras no tienen soluciones (ejemplo 2). También es posible que una ecuación diferencial tenga exactamente una solución. Considérese la ecuación $(y')^4 + y^2 = -1$ que por razones idénticas a aquellas dadas en el ejemplo 2 tiene únicamente la solución $y = 0$.

2.2 Soluciones Generales y particulares

Una solución particular de una ecuación diferencial es una solución cualquiera. La solución general de una ecuación diferencial es el conjunto de todas las soluciones.

Ejemplo 3.

La solución **general** para la ecuación diferencial en el ejemplo 1 puede demostrarse que es $y = C_1 \, sen\ 2x + C_2 \cos 2x$. Es decir, cualquier solución particular de la ecuación diferencial tiene esta forma general.

Algunas soluciones particulares son: *(a)* $y = 5\, sen\ 2x - 3 \cos 2x$ (escogiendo $C_1 = 5$ y $C_2 = -3$), *(b)* $y = sen\ 2x$ (escogiendo $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$) y (c) $y = 0$ (escogiendo $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$).

La solución general de una ecuación diferencial no siempre puede expresarse como fórmula única. Como un ejemplo considere la e.d. $y' + y^2 = 0$, que tiene dos soluciones particulares: y = 1/x, y = 0.

2.3 Problemas de valor inicial, problemas de valor límite

Una e.d. junto con las condiciones complementarias de la variable desconocida y sus derivadas, todas dadas para el mismo valor de la variable independiente, constituye un *problema de valor inicial*. Las condiciones complementarias son *condiciones iniciales*. Si las condiciones complementarias están dadas para más de un valor de la variable independiente, el problema es un *problema de valor límite* y las condiciones son las *condiciones límite*.

Ejemplo 4.
El problema $y'' + 2y' = e^X$; $y(\pi) = 1, y(\pi) = 2$ es un problema de valor inicial, porque las dos condiciones complementarias están ambas dadas para $x = \pi$. El problema $y'' + 2y' = e^X$; $y(0) = 1, y(1) = 1$ es un problema de valor límite porque las dos condiciones complementarias están dadas para diferentes valores $x = 0, x = 1$.

Una ***solución*** para un problema de valor inicial o un problema de valor límite es una función $y(x)$ que satisface tanto la ecuación diferencial como todas las condiciones complementarias dadas.

Ejemplo 5.
Determinar si algunas de las funciones (a) $y_1 = sen\ 2x$, (b) $y_2(x) = x$, (c) $y_3(x) = ½\ sen\ 2x$ es una solución para el problema de valor inicial $y'' + 4y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Solución:

(a) $y_1(x)$ es una solución para la e.d. y satisface la primera condición inicial $y(0) = 0$. Sin embargo, $y_1(x)$ no satisface la segunda condición inicial ($y_1'(x) = 2cos\ 2x; y_1'(0) = 2cos\ 0 = 2 \neq 1$); por lo tanto no es una solución del problema de valor inicial.

(b) $y_2(x)$ satisface ambas condiciones iniciales pero no satisface la e.d. por lo tanto $y_2(x)$ no es una solución.

(c) $y_3(x)$ satisface la ecuación diferencial y ambas condiciones iniciales, por lo tanto **esa es la solución del problema de valor inicial.**

Problemas resueltos

1. Determine si $y(x) = 2e^{-X} + xe^{-X}$ es una solución de $y'' + 2y' + y = 0$

Solución:

Derivando $y(x)$:

$$y'(x) = -2e^{-X} + e^{-X} - xe^{-X} = -e^{-X} - xe^{-X}$$
$$y''(x) = e^{-X} - e^{-X} + xe^{-X} = xe^{-X}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial, obtenemos

$$y''+ 2y' + y = xe^{-X} + 2(-e^{-X} - xe^{-X}) + (2e^{-X} + xe^{-X}) = 0$$

Por lo tanto $y(x)$ es una solución.

2. ¿Es $y(x) = 1$ una solución de $y'' + 2y' + y = x$?

Solución:

De $y(x) = 1$ se tiene que $y'(x) = 0$, $y''(x) = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación diferencial obtenemos:

$$y''+ 2y' +y = 0 + 2(0) + 1 = 1 \neq x$$

Por lo tanto $y(x) = 1$ no es una solución.

3. Demuestre que $y = ln\ x$ es una solución *para* $xy'' + y' = 0$ en ى = (0, ∞) pero no es una solución en ى = (–∞, ∞).

Solución:

En (–∞, ∞) tenemos $y' = 1/x, y'' = -1/x^2$. Sustituyendo estos valores en la e.d. obtenemos:

$$xy'' + y' = 0$$

Por lo tanto $y = ln\ x$ es una solución en (0, ∞).
Nótese que $y = ln\ x$ no puede ser una solución en (–∞, ∞), puesto que el logaritmo no está definido para números negativos y cero.

4. Demuestre que $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución de $y' + 2xy^2 = 0$ en ى = (–1, 1) pero no es una solución en ningún otro intervalo mayor que contenga a ى

Solución:

En (–1, 1) $y = 1/(x^2 - 1)$ y su derivada $y' = -2x/(x^2 - 1)^2$ son funciones bien definidas. Reemplazando estos valores en la e.d. se tiene:

$$y' + 2xy^2 = 0$$

Por lo tanto $y = 1/(x^2 - 1)$ es una solución en ى $= (-1, 1)$.

Nota: Sin embargo, $y = 1/(x^2 - 1)$ no está definido para $x = +/- 1$ y por lo tanto no puede ser una solución para ningún intervalo que contenga cualquiera de esos puntos.

5. Halle una solución al problema de valor inicial $y' + y = 0; y(3) = 2$, si se sabe que la solución general de la ecuación diferencial es $y(x) = C_1e^{-X}$, donde C_1 es una constante arbitraria.

Solución:

Como $y(x)$ es una solución de la e.d. para cualquier valor de C_1, buscamos el valor de C_1 que también satisfaga la condición inicial. Nótese que $y(3) = C_1e^{-3}$. Para satisfacer la condición inicial $y(3) = 2$ es suficiente escoger C_1 de tal forma que $2 = C_1e^{-3}$, es decir, escoger $C_1 = 2e^3$. Reemplazando este valor de C_1 en $y(x)$ obtenemos $y(x) = 2e^3e^{-X} = 2e^{3-X}$ como solución al problema de valor inicial.

6. Halle una solución al problema de valor inicial $y'' + 4y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1$ si se sabe que la solución general de la ecuación diferencial es $y = C_1 \text{ sen } 2x + C_2 \cos 2x$

Solución:

Como $y(x)$ es una solución de la e.d. para todos los valores de C_1 y C_2 (ver ejemplo 1), escogemos aquellos valores de C_1 y C_2 que también satisfacen las condiciones iniciales. Nótese que $y(0) = C_1 \text{sen } 0 + C_2 \cos 0 = C_2$ Para satisfacer la primera condición inicial $y(0) = 0$ escogemos $C_2 = 0$. Además, $y'(x) = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \text{ sen } 2x$ por lo tanto $y'(0) = 2C_1$

Para satisfacer la segunda condición inicial $y'(0) = 1$, escogemos $2C_1 = 1$ o bien $C_1 = ½$ Sustituyendo estos valores de C_1 y C_2 en $y(x)$ obtenemos $y(x) = ½ \text{ sen } 2x$ como solución al problema de valor inicial.

7. Halle una solución al problema de valor inicial $y'' + 4y = 0; y(\pi/8) = 0, y(\pi/6) = 1$ si se sabe que la solución general de la ecuación diferencial es $y = C_1 \text{ sen } 2x + C_2 \cos 2x$

Solución:

Nótese que $y(\pi/8) = C_1 \text{ sen } (\pi/4) + C_2 \cos (\pi/4)$

Para satisfacer la condición $y(\pi/8) = 0$ necesitamos que:

(1) $C_1 \text{sen } (\pi/4) + C_2 \cos (\pi/4) = 0$

Además, $y(\pi/6) = C_1 \text{sen } (\pi/3) + C_2 \cos (\pi/3)$

Para satisfacer la segunda condición, necesitamos que

(2) $C_1 \text{sen } (\pi/3) + C_2 \cos (\pi/3) = 1$

Resolviendo simultáneamente: $C_1 = - C_2 = 2/(\sqrt{3} - 1)$

Sustituyendo esos valores en $y(x)$:

$$y(x) = 2/(\sqrt{3} - 1) (\text{sen } 2x - \cos 2x)$$

Como una solución al problema del valor límite.

8. Halle una solución al problema de valor límite $y'' + 4y = 0; y(0) = 1, y(\pi/2) = 2$ si se sabe que la solución general de la ecuación diferencial es $y = C_1 \text{ sen } 2x + C_2 \cos 2x$

Solución:

Como $y(0) = C_1 \text{ sen } 0 + C_2 \cos 0 = C_2$, debemos escoger $C_2 = 1$ para satisfacer la condición $y(0)= 1$

Como $y(\pi/2) = C_1 \text{ sen } \pi + C_2 \cos \pi = -C_2$, debemos escoger $C_2 = -2$ para satisfacer la condición $y(\pi/2)= 2$

Por tanto, para satisfacer ambas condiciones límites simultáneamente, se necesita que $C_2 =1= -2$ lo cual es imposible. Por tanto, no existe una solución para este problema.

9. Determinar C_1 y C_2 de manera que $y = C_1 \text{ sen } 2x + C_2 \cos 2x + 1$ satisfaga las condiciones $y(\pi/8) = 0, y'(\pi/8) = \sqrt{2}$

Solución:

Nótese que $y(\pi/8) = C_1 \text{ sen } (\pi/4) + C_2 \cos (\pi/4) + 1$

Para satisfacer la condición $y(\pi/8) = 0$ necesitamos que:

(1) $C_1 + C_2 = -\sqrt{2}$

Como $y'(x) = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \text{ sen } 2x$

$$\begin{aligned} y'(\pi/8) &= 2C_1 \cos \pi/4 - 2C_2 \text{ sen } \pi/4 \\ &= \sqrt{2} (C_1 - C_2) \end{aligned}$$

Para satisfacer la segunda condición, necesitamos que

(2) $\sqrt{2}\,(C_1 - C_2) = \sqrt{2}$ o bien $C_1 - C_2 = 1$

Resolviendo simultáneamente: $C_1 = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1),\ C_2 = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$

10. Determinar C_1 y C_2 de manera que $y = C_1 e^{2X} + C_2 e^{X} + 2\,sen\,x$ satisfaga las condiciones $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

Solución:

Como $sen\,0 = 0,\ y(0) = C_1 + C_2$. Para satisfacer la primera condición se necesita:

(1) $C_1 + C_2 = 0$

De $y'(x) = 2C_1 e^{2X} + C_2 e^{X} + 2\cos x$

Se tiene $y'(0) = 2C_1 + C_2 + 2$

Para satisfacer la segunda condición se necesita que

$2C_1 + C_2 + 2 = 1$ o bien

(2) $2C_1 + C_2 = -1$

Resolviendo simultáneamente (1) y (2) obtenemos: $C_1 = -1,\ C_2 = 1$

Problemas propuestos

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la e.d. $y'' - y = 0$?

a) e^X *Solución*

b) sen x

c) $4e^{-X}$ *Solución*

d) 0 *Solución*

e) $\frac{1}{2}x^2 + 1$

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la e.d. $y'' - 4y' + 4y = e^X$?

a) e^X *Solución*

b) e^{2X}

c) $e^{2X} + e^X$ *Solución*

d) $xe^{2X} + e^X$ *Solución*

e) $e^{2X} + xe^X$

En los siguientes problemas hallar C_1 y C_2 de tal forma que $y(x) = C_1\,sen\,2x + C_2 \cos 2x$ satisfaga las condiciones dadas. Determinar si las condiciones dadas son condiciones iniciales o condiciones límite.

3. $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$ *condiciones iniciales*
4. $y(0) = 2,\ y'(0) = 1$ *condiciones iniciales*
5. $y(\pi/2) = 1,\ y'(\pi/2) = 2$ *condiciones iniciales*
6. $y(0) = 1,\ y'(\pi/2) = 1$ *condiciones límite*
7. $y'(0) = 1,\ y'(\pi/2) = 1$ *condiciones límite*
8. $y(0) = 1,\ y'(\pi) = 1$ *condiciones límite*
9. $y(0) = 1,\ y'(\pi) = 2$ *condiciones límite*
10. $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ *condiciones iniciales*
11. $y(\pi/4) = 0,\ y'(\pi/6) = 1$ *condiciones límite*
12. $y(0) = 0,\ y'(\pi/2) = 1$ *condiciones límite*

En los siguientes problemas hallar C_1 y C_2 de tal forma que las funciones dadas satisfagan las condiciones iniciales establecidas.

13. $y(x) = C_1 e^X + C_2 e^{-X} + 4\,sen\,x$	$y(0) = 1,\ y'(0) = -1$	*-2*	*3*
14. $y(x) = C_1 x + C_2 + x^2 - 1$	$y(1) = 1,\ y'(1) = 2$	*0*	*1*
15. $y(x) = C_1 e^X + C_2 e^{2X} + 3e^{3X}$	$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$	*3*	*– 6*
16. $y(x) = C_1\,sen\,x + C_2 \cos x + 1$	$y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = 0$	*0*	*1*
17. $y(x) = C_1 e^X + C_2 xe^X + x^2 e^X$	$y(1) = 1,\ y'(1) = -1$	*1 + 3/e*	*–2 – 2/e*