CAPÍTULO I

CIRCUITOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

1.1. SISTEMAS LINEALES INVARIANTES

Introducción

Un sistema lineal invariante se representa usualmente mediante un bloque en el que se muestran tanto la excitación como la respuesta

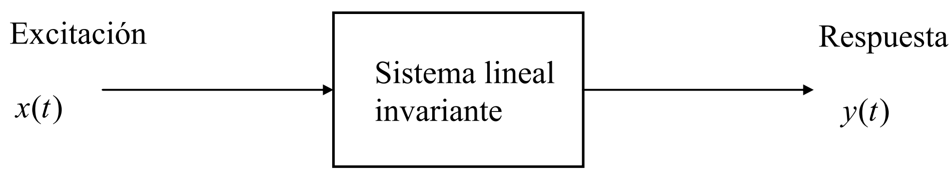


Figura 1

Al aplicar las leyes y principios que rigen el comportamiento de los elementos del sistema se obtiene un problema de valor inicial de orden n, así:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \ldots\ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

Donde: $f(t)$ depende de la excitación y sus m primeras derivadas, así:

$$f(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} x(t)}{dt^{m-2}} + \ldots\ldots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Las condiciones iniciales del sistema son las siguientes:

$$y(0), y'(0), y''(0), \ldots\ldots, y^{(n-1)}(0)$$

Haciendo uso del operador D la ecuación diferencial del sistema es la siguiente:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots.. + a_1 D + a_0) y(t) = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \ldots.. + b_1 D + b_0) x(t)$$

Analizar el sistema consiste en determinar la respuesta ante una excitación determinada y sabiendo que el sistema está inicialmente en reposo, esto es, las condiciones iniciales son iguales a cero. Para llevar a cabo el análisis es necesario resolver la ecuación diferencial.
Recordemos que la solución general de la ecuación diferencial consiste de dos partes a saber: una solución complementaria y una solución forzada. La solución complementaria es

una combinación lineal de las n soluciones de la homogénea, mientras que la solución forzada depende de la excitación.

Solución complementaria

La homogénea asociada a la ecuación diferencial está dada por:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 D + a_0)y(t) = 0$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial viene dada por:

$$(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 \lambda + a_0)y(t) = 0$$

A partir de la ecuación característica se encuentran las n soluciones linealmente independientes de la homogénea y su combinación lineal es la solución complementaria, así:

$$yc(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \ldots\ldots\ldots + C_n y_n(t)$$

La solución forzada depende de la excitación y, por el momento, consideramos el caso en que la excitación es la señal escalón unitario.

Respuesta al escalón unitario y respuesta al impulso

Cuando la excitación es el escalón unitario la ecuación diferencial es la siguiente:

$$(D^n + a_{n-1} D^{n-1} + a_{n-2} D^{n-2} + \ldots\ldots + a_1 D + a_0)y(t) = Ku(t)$$

Donde K es una constante real: $K = \dfrac{1}{a_n}$

De acuerdo con lo estudiado en el curso de ecuaciones diferenciales, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$ygen(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + C_3 y_3(t) + \ldots\ldots + C_n y_n(t) + \frac{K}{a_0}$$

En la expresión anterior, el último término es la solución particular o respuesta forzada del sistema. Las constantes de integración de la solución general se encuentran con base en las condiciones iniciales.

Después de hallar las constantes arbitrarias se escribe la respuesta al escalón unitario: $ye(t)$.

La respuesta al impulso unitario o respuesta natural del sistema se determina mediante la derivada con respecto al tiempo de la respuesta al escalón unitario, así: $h(t) = \frac{d}{dt} ye(t)$

Ejemplo 1

Un sistema lineal invariante, inicialmente en reposo, está regido por la ecuación diferencial:

$$(D^3 + 3D^2 + 4D + 2)y(t) = x(t)$$

Determine la respuesta al escalón unitario $x(t) = u(t)$ y la respuesta natural.

Con base en lo descrito previamente, la solución general es:

$$ygen(t) = \left[1 + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} \cos(t) + C_3 e^{-t} \operatorname{sen}(t)\right] u(t)$$

Derivando dos veces y evaluando en las condiciones iniciales encontramos que la respuesta al escalón unitario viene dada por:

$$ye(t) = \frac{1}{2}\left[1 - 2e^{-t} + e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \operatorname{sen}(t)\right] u(t)$$

En consecuencia, la respuesta natural del sistema es la siguiente:

$$h(t) = e^{-t}\left[1 - \cos(t)\right] u(t)$$

Respuesta ante cualquier excitación. La integral de convolución

De acuerdo con lo estudiado previamente en el curso de circuitos I, la respuesta ante la excitación $x(t)$ es la integral de convolución:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

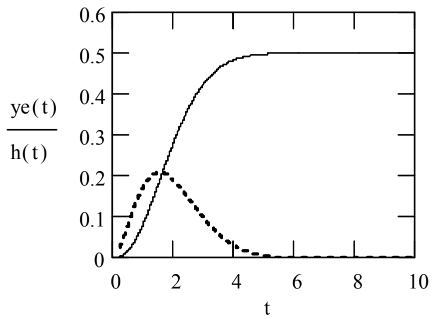
El estudiante puede verificar que si la excitación es: $x(t) = 10e^{-t}u(t)$, la respuesta es:

$$y(t) = 10\left[\int_0^t e^{-\tau}(1 - \cos(\tau))e^{-(t-\tau)}d\tau\right] u(t)$$

Evaluando la integral, se tiene:

$$y(t) = 10e^{-t}\left[t - \operatorname{sen}(t)\right] u(t)$$

A continuación se muestran las gráficas de la respuesta al escalón, la respuesta natural y la respuesta a la excitación dada. En la primera figura se ilustran tanto la respuesta al escalón como la respuesta natural. Recuerde que la respuesta natural es la respuesta al impulso unitario.



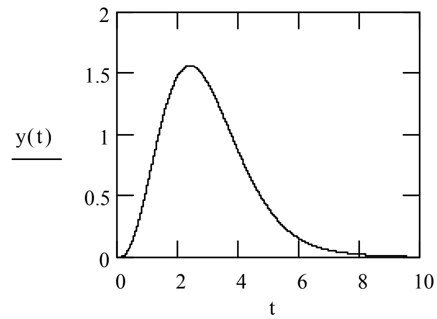


Figura 2a **Figura 2b**

La transformada de Laplace

En el curso de ecuaciones diferenciales se estudió la transformada de Laplace para pasar una función del dominio de tiempo al dominio de la frecuencia compleja s con la siguiente definición:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Siendo s un número complejo que tiene parte real y parte imaginaria, así: $s = \sigma + j\omega$ y tiene unidades de radianes/segundos.
Se conviene en que las funciones en el dominio de la frecuencia se denotan por mayúsculas.
Para las funciones más comunes de ingeniería siempre es posible pasar del dominio del tiempo al de la frecuencia y viceversa.
En la tabla 1 aparecen las funciones elementales en ambos dominios.

Función de transferencia de un sistema lineal invariante

En el dominio de tiempo, la relación entre la entrada y la salida para un sistema lineal invariante es la ecuación diferencial:

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0) y(t) = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \ldots + b_1 D + b_0) x(t)$$

Si aplicamos la transformada de Laplace, teniendo en cuenta que las condiciones iniciales son iguales a cero, se obtiene:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0) X(s)$$

La relación entre la salida y la entrada en el dominio de la frecuencia recibe el nombre de función de transferencia del sistema y se denota como $H(s)$.

$$H(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_{m-2}s^{m-2} +.....+b_1 s \ + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} +.....+b_1 s \ + b_0}$$

$f(t)$: Función en el dominio de tiempo	$F(s)$: Función en el dominio de frecuencia.
$\delta(t)$: función impulso	1
$u(t)$: función escalón unitario	$\frac{1}{s}$
$e^{at}u(t)$: función exponencial	$\frac{1}{s-a}$
$\text{sen}(\omega t)u(t)$: función seno	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)u(t)$: función coseno	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$t^{\alpha}u(t)$: Función potencia con $\alpha \in R$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$
$t^n u(t)$: función potencia con $n = 1,2.,3,.......$	$\frac{1}{s^{n+1}}\ n!$

Tabla 1.

A continuación se ilustran las propiedades más importantes de la transformada de Laplace.

Dominio de tiempo	Dominio de la frecuencia
$af(t)+g(t)$	$aF(s)+G(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$Df(t)$	$sF(s)-f(0)$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$tf(t)$	$-DF(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty}F(u)du$
$f(t)*g(t)$	$F(s)G(s)$

Tabla 2.

Como puede verse, la función de transferencia es una función racional y se puede expresar en la forma:

$$H(s)=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3).......(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3).........(s-p_n)}$$

Las raíces del numerador son los ceros de la función de transferencia: $z_1, z_2, ..., z_m$
Las raíces del denominador son los polos de la función de transferencia: $p_1, p_2, ..., p_n$
Según se podrá constatar posteriormente, un sistema lineal invariante tiene una función de transferencia tal que el número de polos es mayor o igual que el número de ceros. Puesto que los ceros y los polos son números complejos, se puede hacer un diagrama en el plano complejo en el que se indique su ubicación, dicho diagrama recibe el nombre de diagrama de polos y ceros de la función de transferencia.

Puesto que la salida en el dominio de la frecuencia es el producto entre la función de transferencia y la entrada, podemos escribir:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

Cuando la excitación es la función impulso, la salida es la respuesta natural, es decir, la transformada inversa de la función de transferencia. El procedimiento usual para hallar la inversa de una función $F(s)$ es el de descomponer en fracciones parciales. Un caso de particular interés es el correspondiente al caso en que numerador y denominador sean del mismo grado, caso en el cual aparece la función impulso unitario.

Ejemplo 2

La función de transferencia de un sistema lineal invariante está dada por:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

Determine la respuesta natural, la respuesta al escalón unitario y la respuesta a la excitación:

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

La función de transferencia se puede expresar en la forma:

$$H(s) = 1 + \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

En consecuencia, la respuesta natural está dada por: $h(t) = \delta(t) + 2e^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t)$

En cuanto a la respuesta al escalón unitario, se puede proceder de dos maneras distintas, a saber:

a) Mediante la integral de la respuesta natural: $ye(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$

b) Mediante la inversa de $Ye(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{s^2 + 2s + 3}{s(s+1)(s+2)}$

Descomponiendo en fracciones parciales, tenemos: $Ye(s) = \frac{3}{2s} + \frac{3}{2(s+2)} - \frac{2}{s+1}$

En consecuencia, la respuesta al escalón unitario es: $ye(t) = \left[\frac{3}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} - 2e^{-t}\right]u(t)$

Para hallar la respuesta a la función: $e^{-t}u(t)$ partimos de la correspondiente transformada de Laplace, así:

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^2 (s+2)}$$

Descomponiendo en fracciones parciales, se tiene: $Y(s) = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2}$

Tomando la transformada inversa de Laplace, se encuentra que:

$$y(t) = \left[2te^{-t} - 2e^{-t} + 3e^{-2t}\right]u(t)$$

1.2. ESTABILIDAD

Definición

Consideremos un sistema lineal invariante cuya función de transferencia está dada por:

$$H(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3).......(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3).........(s-p_n)}, \; p_k = \sigma_k + j\omega_k$$

La estabilidad del sistema está asociada con la ubicación de los polos de $H(s)$ así:

a) El sistema es estable si todos los polos están a la izquierda del eje imaginario, es decir, para todo valor de k se verifica que $\sigma_k < 0$. En este caso, suponiendo que los polos son diferentes entre sí, la respuesta natural del sistema es de la forma:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{n} C_k e^{\sigma_k t} e^{j\omega_k t} \text{ . Es claro que: } \lim_{t \to \infty} h(t) = 0.$$

b) El sistema es inestable si al menos uno de los polos está a la derecha del eje imaginario o si se tienen polos múltiples sobre el eje imaginario.
c) El sistema es marginalmente estable si presenta polos simples sobre el eje imaginario.

Ejemplo 3

Determine si los siguientes sistemas son estables, inestables o marginalmente estables:

a) $H(s) = \dfrac{3s}{s^2 + 3s + 2}$ b) $H(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$

c) $H(s) = \dfrac{s - 1}{s^2(s + 3)}$ d) $H(s) = \dfrac{2s + 3}{s^3 + s^2 + 4}$

El estudiante puede verificar lo siguiente:

a) Estable
b) Marginalmente estable
c) Inestable
d) Inestable.

Polinomios de Hurwitz

Consideremos un polinomio racional entero, es decir, de coeficientes reales, así:

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + ... + a_1 s + a_0$$

El polinomio se puede expresar mediante una parte par y otra impar, así:

$$P(s) = [a_n s^n + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-4} s^{n-4} + ...] + [a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-3} s^{n-3} + a_{n-5} s^{n-5} + ...]$$

Se dice que el polinomio es de Hurwitz si sus raíces están a la izquierda del eje imaginario o son simples sobre el eje imaginario. Una condición necesaria para que un polinomio sea de Hurwitz, es que todos los coeficientes del polinomio son positivos, a menos que sea estrictamente par o estrictamente impar. Lo anterior significa que si alguno de los coeficientes es negativo, el polinomio tendrá raíces a la derecha del eje imaginario. De otro modo, si el polinomio no es par ni impar y uno de los coeficientes es cero, el polinomio no puede ser de Hurwitz.

Ejemplo 4

El estudiante puede verificar que los siguientes polinomios no son de Hurwitz:

a) $P(s) = 3s^2 + 4s - 2$ b) $P(s) = 3s^3 + 4s + 2$ c) $P(s) = s^4 + 4s^3 + 2s^2$

Una condición de suficiencia para que un polinomio sea de Hurwitz es que la fracción continuada entre sus partes par e impar tenga todos sus cocientes positivos. Si escribimos el polinomio mediante sus partes par e impar, así: $P(s) = M(s) + N(s)$, la fracción continuada es la siguiente:

$$\frac{M(s)}{N(s)} = q_1 s + \cfrac{1}{q_2 s + \cfrac{1}{q_3 s + \dots\dots\dots}}$$

Ejemplo 5

Determine si el siguiente polinomio es de Hurwitz: $2s^4 + 3s^3 + s^2 + 5s + 4$.

La fracción continuada es la siguiente:

$$\frac{2s^4 + s^2 + 4}{3s^3 + 5s} = \frac{2}{3}s + \cfrac{1}{-\frac{9}{7}s + \cfrac{1}{-\frac{49}{213}s + \cfrac{1}{\frac{71}{28}s}}}.$$

Con base en lo planteado previamente, el polinomio no es de Hurwitz. Se puede generalizar el hecho de que por cada cociente negativo hay una raíz a la derecha del eje imaginario. Para nuestro ejemplo, el polinomio tiene dos raíces a la izquierda del eje imaginario y dos a la derecha. En efecto, si se usa un paquete como Mathcad o Matlab, se puede verificar lo anterior.
Cuando el polinomio es estrictamente par o impar, la fracción continuada se hace entre el polinomio y su primera derivada: $\dfrac{P(s)}{P'(s)}$.

Ejemplo 6

Determine si el siguiente polinomio es de Hurwitz: $P(s) = s^5 + 5s^3 + 3s$.
La fracción continuada es la siguiente:

$$\frac{s^5 + 5s^3 + 3s}{5s^4 + 15s^2 + 3} = \frac{1}{5}s + \cfrac{1}{\frac{5}{2}s + \cfrac{1}{\frac{2}{9}s + \cfrac{1}{\frac{135}{26}s + \cfrac{1}{\frac{26}{45}s}}}}$$

Como puede verse, el polinomio es de Hurwitz.

1.3. CIRCUITOS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Introducción

Consideremos un circuito RLC serie como lo ilustra la figura 4. La ley de Kirchhoff para voltajes establece que:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_i(t)$$

Con base en los principios circuitales, tenemos:

$$v_R(t) = Ri(t)$$
$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$$
$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = v_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)dt$$

Suponiendo que el sistema está inicialmente en reposo y aplicando la transformada de Laplace, tenemos:

$$V_R(s) + V_L(s) + V_C(s) = V_i(s)$$

A partir de las relaciones entre la corriente y el voltaje en los elementos, se tiene:

$$V_R(s) = RI(s) \qquad V_L(s) = LsI(s) \qquad V_C(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$$

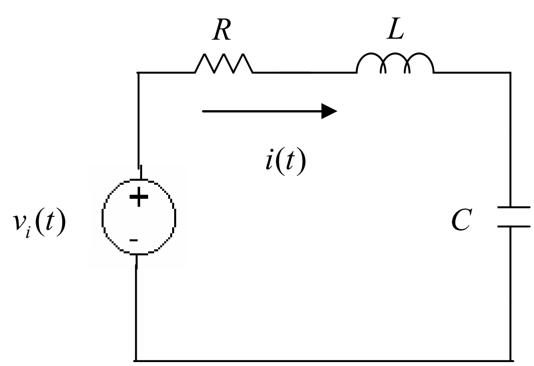


Figura 4.

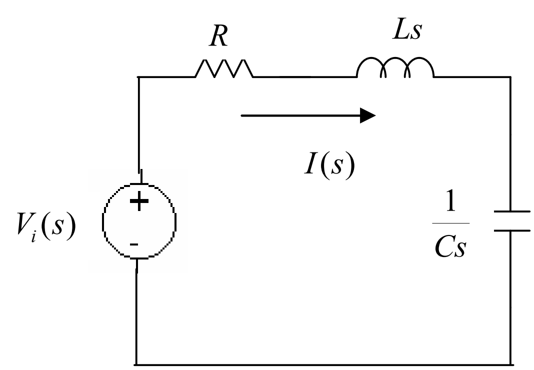


Figura 5.

El circuito de la figura 5, es el equivalente en el dominio de la frecuencia del circuito de la figura 4.

Impedancia de un elemento circuital

La relación entre el voltaje y la corriente en un elemento en el dominio de la frecuencia recibe el nombre de impedancia del elemento.
Puede verse que:

a) La impedancia del resistor es $Z_R(s) = R$, es decir, la impedancia de un resistor es constante e igual a su resistencia.
b) La impedancia del inductor es $Z_L(s) = Ls$, es decir, la impedancia de un inductor es directamente proporcional a la frecuencia.
c) La impedancia del capacitor es $Z_C(s) = 1/Cs$, es decir, la impedancia de capacitor es inversamente proporcional a la frecuencia.

Admitancia de un elemento circuital

Es la relación entre la corriente y el voltaje en el dominio de la frecuencia, es decir, la admitancia es el inverso de la impedancia. Evidentemente, las admitancias de los tres elementos circuitales básicos son:

a) Para el resistor: $Y_R(s) = 1/R$
b) Para el inductor: $Y_L(s) = 1/Ls$
c) Para el capacitor: $Y_C(s) = Cs$

1.4. TÉCNICAS DE SIMPLIFICACIÓN DE CIRCUITOS

Elementos en serie

Dos elementos circuitales con impedancias individuales: $Z1(s)$ y $Z2(s)$ conectados en serie, se pueden tratar, para efectos de análisis, como un solo elemento cuya impedancia equivalente es la suma de las impedancias individuales, así: $Ze(s) = Z1(s) + Z2(s)$.

Elementos en paralelo

Dos elementos circuitales con admitancias individuales: $Y1(s)$ y $Y2(s)$ conectados en paralelo, se pueden tratar, para efectos de análisis, como un solo elemento cuya admitancia equivalente es la suma de las admitancias individuales, así: $Ye(s) = Y1(s) + Y2(s)$.

Transformación de fuentes reales

Para efectos de análisis, una fuente real de voltaje: $V_e(s)$ en serie con una impedancia: $Z(s)$ es equivalente a una fuente real de corriente: $I_e(s)$ en paralelo con la impedancia: $Z(s)$. La equivalencia de las fuentes implica que:

$$V_e(s) = Z(s)I_e(s)$$

Equivalente Thévenin

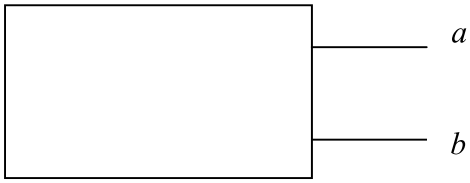


Figura 6.

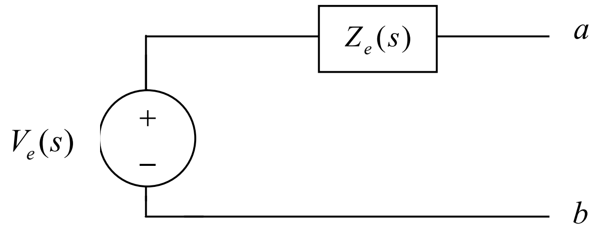


Figura 7.

El sistema de la figura 6 es un circuito cualquiera y se tiene acceso a los terminales a y b. El circuito de la figura 7 es el equivalente Thévenin entre a y b si se verifica que

1) $V_e(s)$ es el voltaje de circuito abierto entre los terminales dados.
2) $Z_e(s)$ es el cociente entre el voltaje de circuito abierto y la corriente de cortocircuito.

Para encontrar el equivalente Thévenin entre dos puntos dados de un circuito se procede de la misma forma que si fueran circuitos resistivos, es decir, haciendo las dos pruebas o aplicando las técnicas de simplificación.

1.5. TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS

Un circuito en el dominio de la frecuencia se puede analizar por el método de las corrientes de malla o por el método de los voltajes de nodos, de la misma forma que para circuitos resistivos.

Funciones circuitales en el dominio de la frecuencia

Consideremos el circuito de la figura 8, que está alimentado por una fuente ideal de voltaje $V_i(s)$. Si a la salida se coloca una impedancia $Z_L(s)$, estamos interesados en determinar la ganancia de voltaje y la admitancia de entrada del sistema.

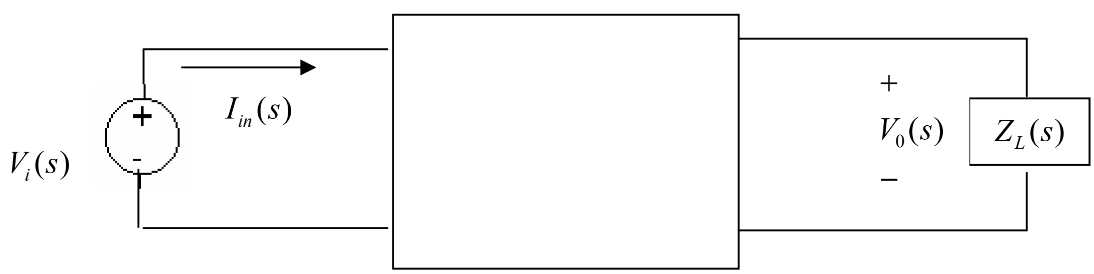


Figura 8.

La admitancia de entrada del circuito se define como $Y_{in}(s) = \dfrac{I_{in}(s)}{V_i(s)}$.

La ganancia de voltaje del sistema se define como $G(s) = \dfrac{V_0(s)}{V_i(s)}$.

Tanto la admitancia de entrada como la ganancia de voltaje son funciones racionales de variable compleja $s = \sigma + j\omega$. Las funciones circuitales mencionadas se obtienen analizando el circuito mediante las técnicas de análisis previamente descritas.

Ejemplo 7

Determine la admitancia de entrada y la ganancia de voltaje para el circuito de la figura 9.

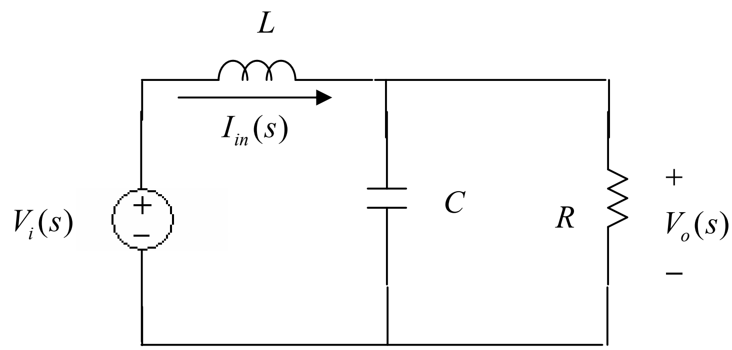


Figura 9.

Aplicando la Ley de Kirchhoff para corrientes, se tiene: $\dfrac{V_i - V_o}{Ls} = CsV_o + \dfrac{V_o}{R}$.

$\left(Cs + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{Ls}\right)V_o = \dfrac{V_i}{Ls}$. Despejando el voltaje de salida, resulta: $V_o(s) = \dfrac{RV_i(s)}{RLCs^2 + Ls + R}$.

La función de transferencia queda en la forma: $G(s) = \dfrac{\dfrac{1}{LC}}{s^2 + \dfrac{1}{RC}s + \dfrac{1}{LC}}$. Con base en lo estudiado previamente, la frecuencia natural de oscilación y el amortiguamiento del sistema vienen dados por: $\omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ $\alpha = \dfrac{1}{2RC}$.

Con base en lo anterior, la ganancia de voltaje del sistema está dada por:

$$G(s) = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^{\ 2}}.$$

En cuanto a la admitancia de entrada, el estudiante puede verificar que viene dada por:

$$Y_{in}(s) = \frac{s + 2\alpha}{L(s^2 + 2\alpha s + \omega_n^{\ 2})}.$$

Puede verse que ambas funciones circuitales tienen los mismos polos. En cuanto a los ceros, la ganancia de voltaje no tiene ceros finitos y la admitancia de entrada presenta un cero finito. La ubicación de los polos y ceros dependen de los valores de los parámetros circuitales. Se pueden presentar tres situaciones diferentes, a saber:

a) Movimiento sobreamortiguado: $\alpha > \omega_n$

b) Movimiento críticamente amortiguado: $\alpha = \omega_n$

c) Movimiento subamortiguado: $\alpha < \omega_n$.

Con la información dada por las funciones circuitales podemos determinar la corriente de entrada y el voltaje de salida cualquiera que sea la excitación. Por ejemplo, si los parámetros del circuito son: $R = 10\Omega \quad C = 0.05F \quad L = 2H$, tenemos:

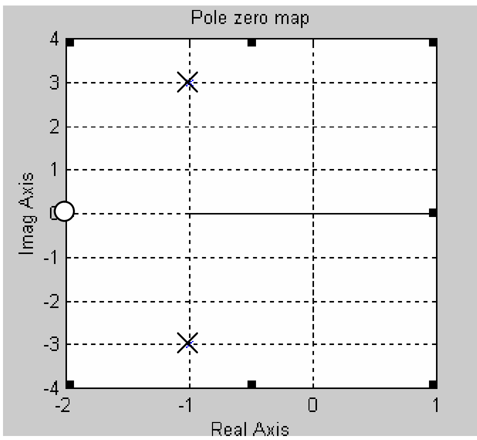


Figura 10

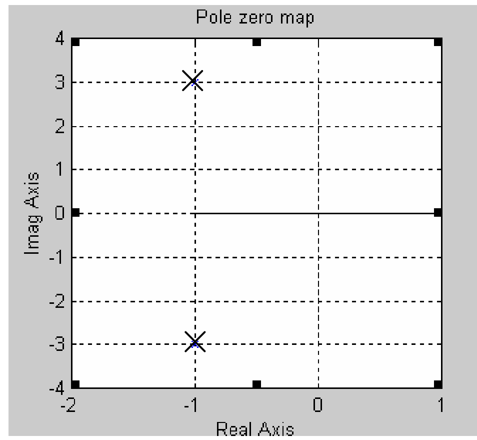


Figura 11

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} \qquad Y_{in}(s) = \frac{0.5(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$

Ejemplo 8

Para el circuito del ejemplo anterior

a) Determine el voltaje de salida cuando la excitación es la señal escalón unitario y represente gráficamente.

b) Efectúe la simulación en SPICE y compare los resultados.

Solución

a) La función de transferencia del sistema es: $\dfrac{V_o(s)}{V_i(s)} = \dfrac{10}{s^2 + 2s + 10}$. Puesto que la excitación es la señal escalón unitario, tenemos: $V_i(s) = \dfrac{1}{s}$

En consecuencia, el voltaje de salida en el dominio de la frecuencia es:

$$V_o(s) = \frac{10}{s(s^2 + 2s + 10)}$$

La transformada inversa de Laplace de $V_o(s)$ es la respuesta en el dominio de tiempo.

$$v_o(t) = \left[1 - e^{-t}\cos(3t) - \frac{1}{3}e^{-t}\,\mathrm{sen}(3t)\right]u(t)$$

La respuesta natural es la derivada de la respuesta al escalón. Las figuras 12 y 13 muestran las gráficas correspondientes. Se obtuvieron con el paquete: MATHCAD.

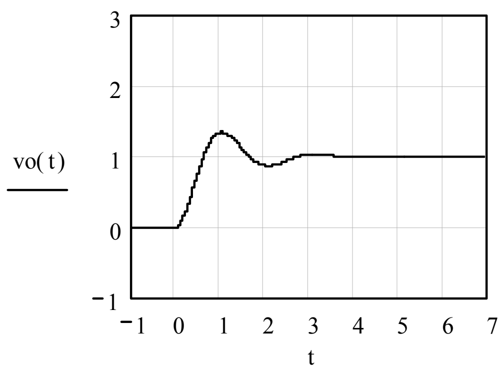


Figura 12.

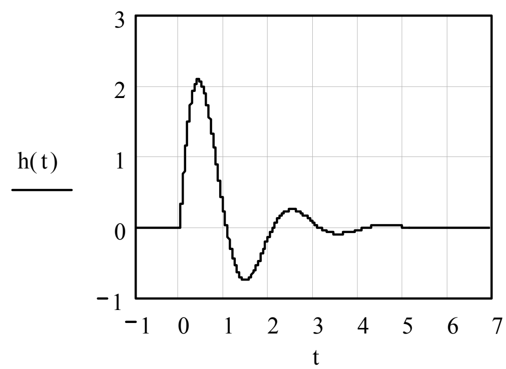


Figura 13.

Se deja al estudiante la simulación del circuito.

Ejemplo 9

Para el circuito de la figura 14:

a) Encuentre la función de transferencia.
b) Tome los siguientes datos: $R = 2 \quad C = 1 \quad L = 1$ y dibuje el diagrama de polos y ceros.
c) Escriba la función de transferencia en forma factorizada.
d) Determine la respuesta al escalón unitario y la respuesta natural. Represente gráficamente.
e) Efectúe la simulación con SPICE y compare resultados.

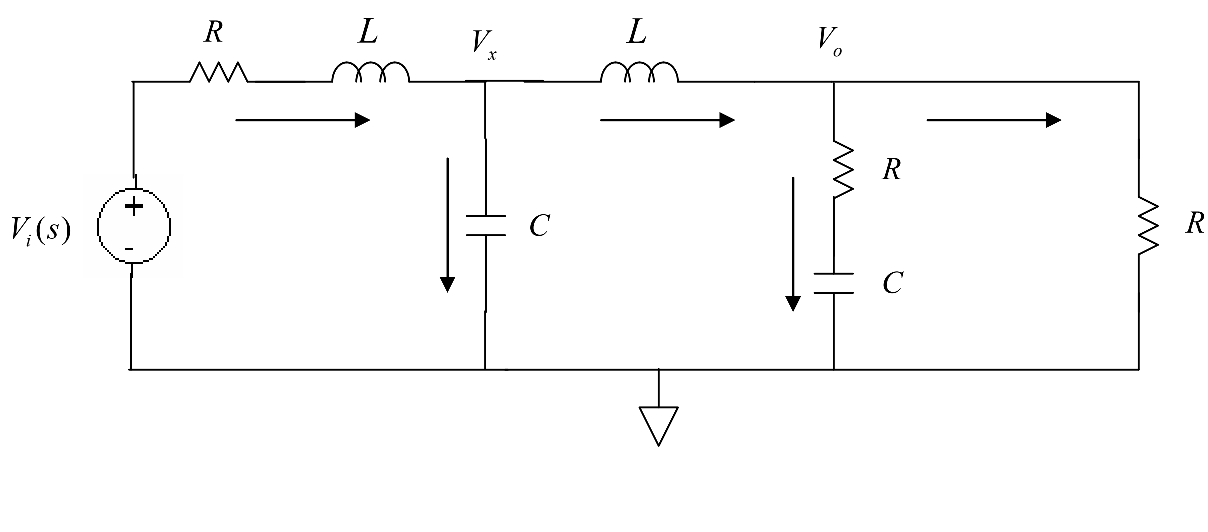


Figura 14.

Solución

a) Las ecuaciones del circuito se obtienen al aplicar la ley de Kirchhoff para corrientes en los nodos rotulados con: V_x, V_o

$$\frac{V_i - V_x}{Ls + R} = CsV_x + \frac{V_x - V_o}{Ls} \qquad\qquad \frac{V_x - V_o}{Ls} = \frac{V_0}{R + \dfrac{1}{Cs}} + \frac{V_o}{R}$$

El sistema se organiza de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{Ls + R} + Cs + \dfrac{1}{Ls} & -\dfrac{1}{Ls} \\ -\dfrac{1}{Ls} & \dfrac{1}{Ls} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{Cs}{RCs + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{V_i}{Ls + R} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema, se encuentra que:

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{R^2Cs + R}}{\mathrm{2L^2C^2Rs^4 + (3LC^2R^2 + L^2C)s^3 + (6RLC + R^3C^2)s^2 + (4R^2C + 2L)s + 2R}}$$

b) Con los datos dados, se tiene que:

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{4s + 2}}{\mathrm{4s^4 + 13s^3 + 20s^2 + 18s + 4}}$$

El diagrama de polos y ceros se muestra en la figura 15 y se obtiene usando un paquete de computador.

Ceros: $z = -0.5$ Polos: -1.6500 -0.3091 $-0.6455 + \mathrm{j}1.2427$ $-0.6455 - \mathrm{j}1.2427$

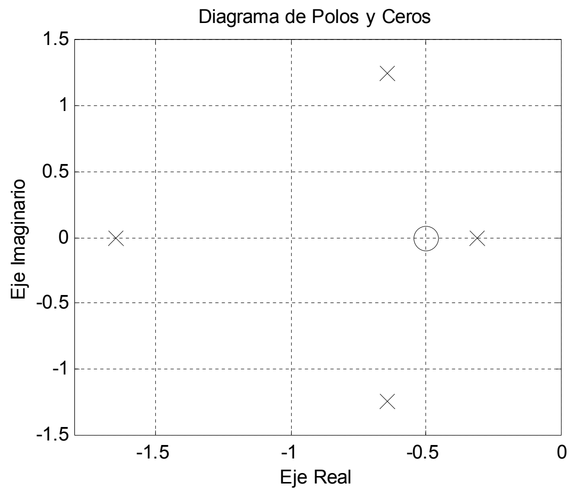


Figura 15.

c) La función de transferencia en forma factorizada es la siguiente:

$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + 0.3091)(s + 1.6500)(s^2 + 1.2910s + 1.9609)}$$

La respuesta al escalón unitario en el dominio de la frecuencia es:

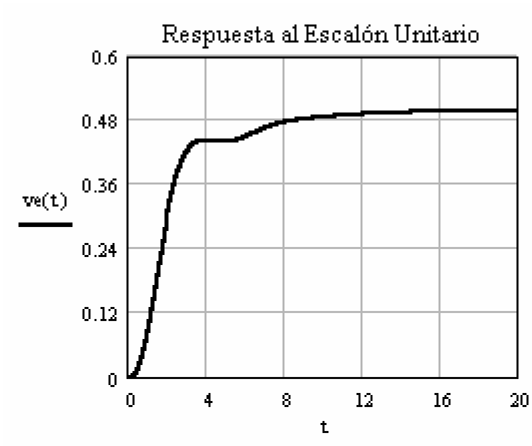
$$G(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + 0.3091)(s + 1.6500)(s^2 + 1.2910s + 1.9609)s}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, obtenemos la respuesta al escalón unitario en el dominio de tiempo: así:

$$ve(t) = 0.5 - 0.278e^{-0.309t} - 0.204e^{-1.65t} - 0.018e^{-0.645t}\cos(1.243t) - 0.349e^{-0.645}\mathrm{sen}(1.243t)$$

Las figuras 16 y 17 muestran la respuesta al escalón y la respuesta natura del circuito.

Para las gráficas se usó el paquete: MATHCAD.



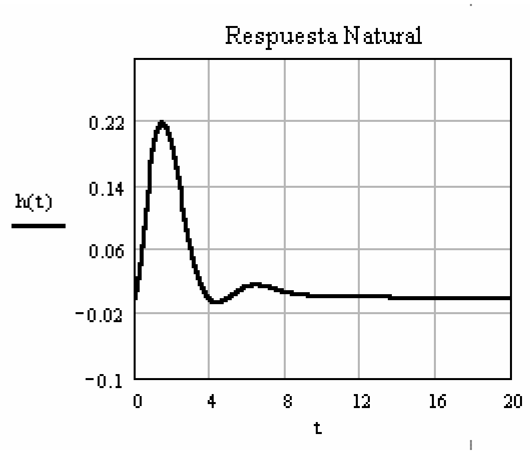


Figura 16 **Figura 17**

Ejemplo 10

Para el circuito de la figura 18, repita el procedimiento del ejemplo anterior. Tome: $k = 0.5$.

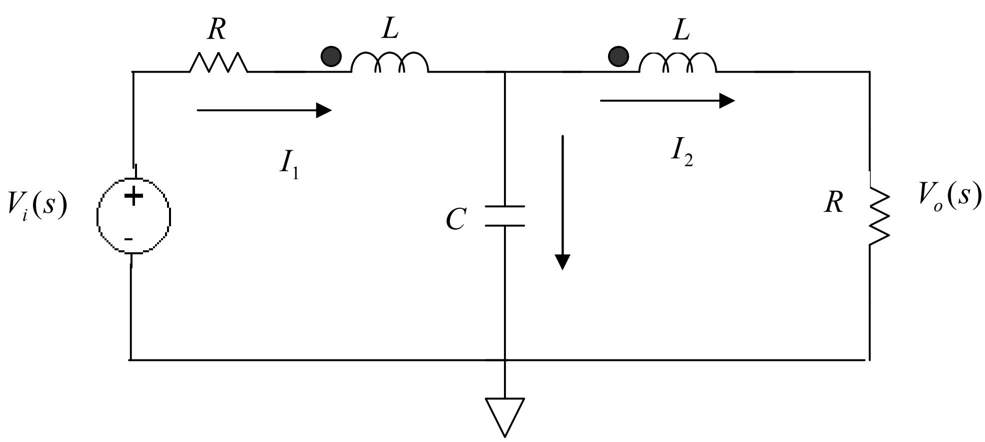


Figura 18.

a) El estudiante puede verificar que la ecuación matricial de sistema para las variables: $I_{,}$, I_2 , es:

$$\begin{bmatrix} Ls + R + \dfrac{1}{Cs} & Ms - \dfrac{1}{Cs} \\ Ms - \dfrac{1}{CS} & Ls + R + \dfrac{1}{CS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde $M = k\sqrt{L_1 L_2} = kL$ es la inductancia mutua de las bobinas acopladas.

Resolviendo el sistema encontramos la corriente: I_2 y con base en el resultado se encuentra el voltaje de salida como: $V_o(s) = RI_2(s)$.

$$V_0(s) = \frac{R(-kLCs^2 + 1)}{(1-k^2)L^2Cs^3 + 2RLCs^2 + (R^2C + 2kL + 2L)s + 2R} V_i(s)$$

b) Con los datos dados, la función de transferencia del circuito es:

$$G(s) = \frac{-4}{3} \frac{s^2 - 2}{s^3 + \frac{16}{3}s^2 + \frac{28}{3}s + \frac{16}{3}}$$

Se deja al estudiante el dibujar el diagrama de polos y ceros. Observe que los polos del circuito son reales y hay dos que son iguales.

c) La función de transferencia en su forma factorizada es:

$$G(s) = \frac{-0.75(s+\sqrt{2})(s-\sqrt{2})}{(s+4/3)(s+2)^2}$$

d) La respuesta al escalón unitario está dada por:

$$vo(t) = \left[-\frac{1}{2}e^{-\frac{4}{3}t} - 2te^{-2t} + \frac{1}{2} \right] u(t)$$

1.6. REDES DE DOS PUERTOS

Introducción

Consideremos un circuito que no tiene fuentes independientes y que tiene dos terminales de acceso, tal como lo ilustra la figura 21. Las variables circuitales son los dos voltajes y las dos corrientes. Nuestro interés consiste en determinar las ecuaciones del sistema cuando dos de las variables son funciones de las otras dos.

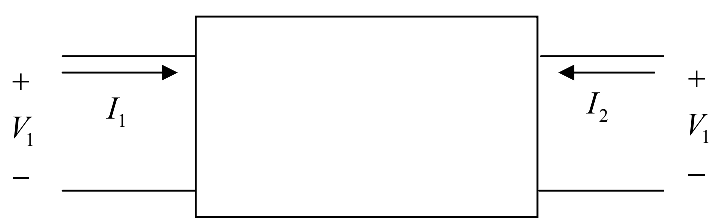


Figura 21.

Parámetros de admitancia de cortocircuito

Supongamos que las variables independientes son los voltajes, en tal caso, las ecuaciones del circuito son las siguientes:

$$I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2$$
$$I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2$$

En forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Con base en las ecuaciones del circuito, los parámetros de admitancia de cortocircuito se definen de la siguiente manera:

$$y_{11} = \frac{I_1}{V_1}\bigg|_{V_2 = 0} \quad y_{21} = \frac{I_2}{V_1}\bigg|_{V_2 = 0} \quad y_{12} = \frac{I_1}{V_2}\bigg|_{V_1 = 0} \quad y_{22} = \frac{I_2}{V_2}\bigg|_{V_1 = 0}$$

El circuito equivalente, en términos de los parámetros de admitancia de cortocircuito se muestra en la figura 22.

Los parámetros de admitancia de cortocircuito se pueden determinar aplicando las técnicas de análisis previamente presentadas.

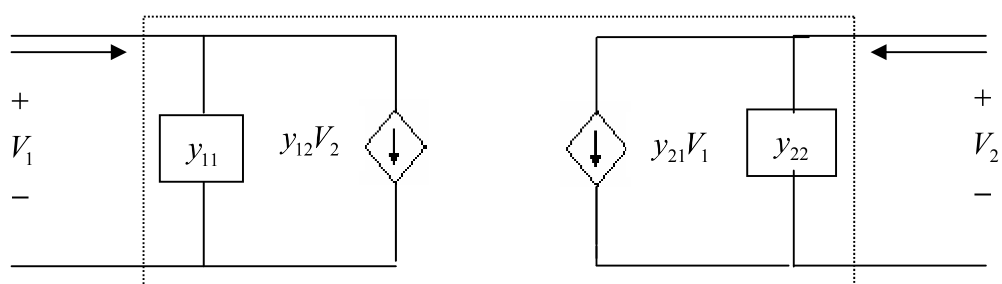


Figura 22.

Ejemplo 11

Determine los parámetros de admitancia de cortocircuito para el circuito de la figura 23.

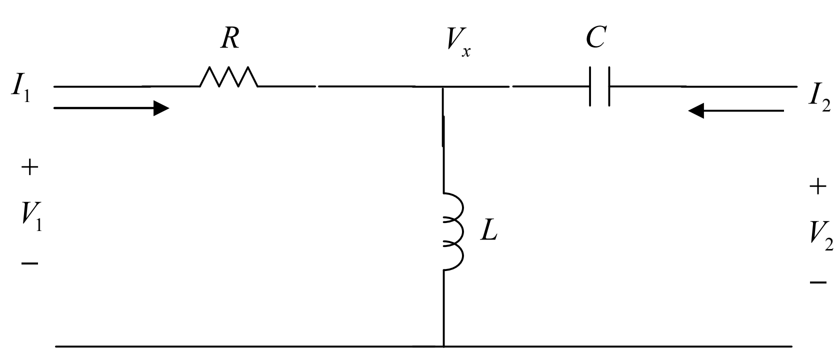


Figura 23.

Las ecuaciones del circuito son:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_x}{Ls + R} \quad I_2 = Cs(V_2 - V_x) \quad \frac{V_1 - V_x}{Ls + R} + Cs(V_2 - V_x) = \frac{V_x}{Ls}$$

Despejando V_x en la tercera ecuación, se obtiene:

$$V_x = \frac{LsV_1 + (L^2Cs^3 + RLCs^2)V_2}{L^2Cs^3 + RLCs^2 + 2Ls + R}$$

Reemplazando el resultado anterior en las dos primeras ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{LCs^2 + 1}{L^2Cs^3 + RLCs^2 + 2Ls + R} & \dfrac{-LCs^2}{L^2Cs^3 + RLCs^2 + 2Ls + R} \\ \dfrac{-LCs^2}{L^2Cs^3 + RLCs^2 + 2Ls + R} & \dfrac{2LCs^2 + RCs}{L^2Cs^3 + RLCs^2 + 2Ls + R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Puede notarse que:

$$y_{12} = y_{21} = \frac{-LCs^2}{L^2Cs^3 + RLCs^2 + 2Ls + R}$$

Lo anterior es cierto para cualquier circuito pasivo.

Admitancia de entrada y ganancia de voltaje

A partir de los parámetros de admitancia de cortocircuito se pueden determinar las funciones circuitales de interés cuando a la entrada se coloca una fuente ideal de voltaje y a la salida se conecta una carga resistiva, tal como lo ilustra la figura 24.

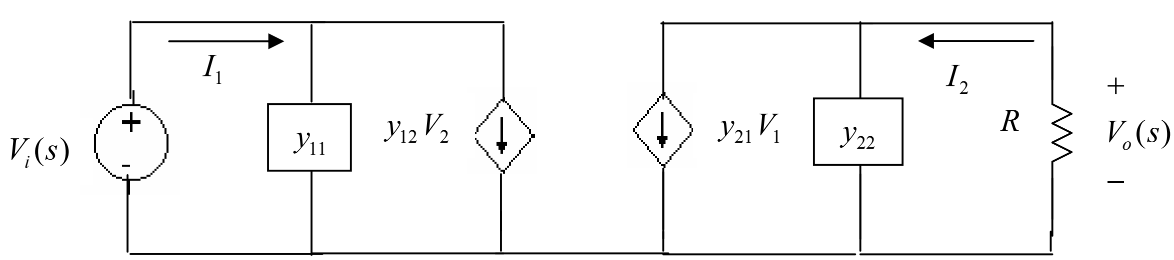


Figura 24.

Las ecuaciones del circuito son:

$$I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \quad I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \quad V_1 = V_i(s) \quad I_2 = -\frac{V_o(s)}{R}$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones, obtenemos:

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{-y_{21}}{y_{22} + \frac{1}{R}} \qquad Y_{in}(s) = y_{11} - \frac{y_{12} y_{21}}{y_{22} + \frac{1}{R}}$$

Ejemplo 12

Los parámetros de admitancia de cortocircuito de un circuito vienen dados por:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2(s^2+1)}{2s^3+3s^2+4s+3} & \frac{-2s^2}{2s^3+3s^2+4s+3} \\ \frac{-2s^2}{2s^3+3s^2+4s+3} & \frac{4s^2+3s}{2s^3+3s^2+4s+3} \end{bmatrix}$$

a) Determine la ganancia de voltaje del circuito cuando se le conecta una carga: $R = 0.9\,\Omega$
b) Dibuje el diagrama de polos y ceros
c) Encuentre la respuesta al escalón unitario y represente gráficamente.

Solución.

a) La ganancia de voltaje del circuito es:

$$G(s) = \frac{-\frac{-2s^2}{2s^3+3s^2+4s+3}}{\frac{10}{9} + \frac{4s^2+3s}{2s^3+3s^2+4s+3}} = \frac{18s^2}{20s^3+66s^2+67s+30}$$

b) La función tiene un cero doble en el origen y tres polos, dados por:

$$p_1 = -2 \quad p_2 = -0.65 - j0.57 \quad p_3 = -0.65 + j0.57$$

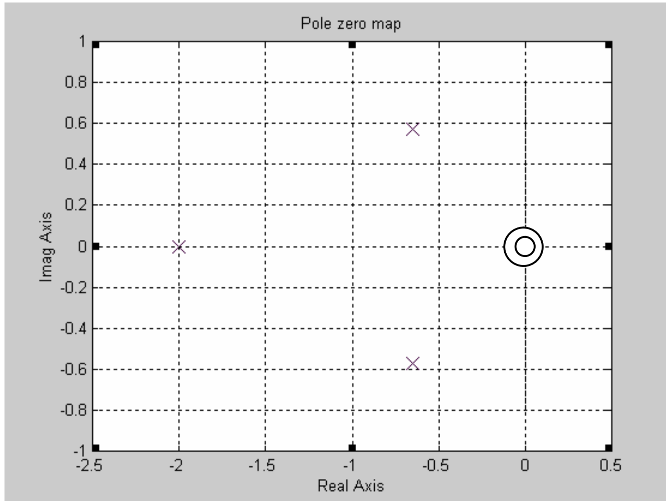


Figura 25.

La figura 25 ilustra el diagrama de polos y ceros. Se puede observar el cero doble en el origen.

c) Para hallar la respuesta al escalón unitario escribimos la ganancia de voltaje en forma factorizada, así:

$$V_o(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{18s^2}{(s+2)(20s^2+26s+15)s}$$

La transformada inversa de laplace de la salida es:

$$v_o(t) = -\frac{36}{43}e^{-2t} + e^{-0.65t}\left[\frac{36}{43}\cos(0.57t) - \frac{198}{5633}\operatorname{sen}(0.57t)\right]u(t)$$

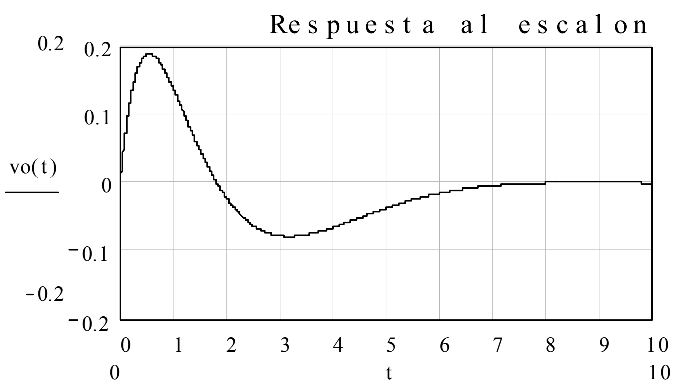


Figura 26.

Parámetros de impedancia de circuito abierto

Supongamos que las variables independientes son los voltajes, en tal caso, las ecuaciones del circuito son las siguientes:

$$V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2$$
$$V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2$$

En forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Con base en las ecuaciones del circuito, los parámetros de impedancia de circuito abierto se definen de la siguiente manera:

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right| I_2 = 0 \quad z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right| I_2 = 0 \quad z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right| I_1 = 0 \quad z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right| I_1 = 0$$

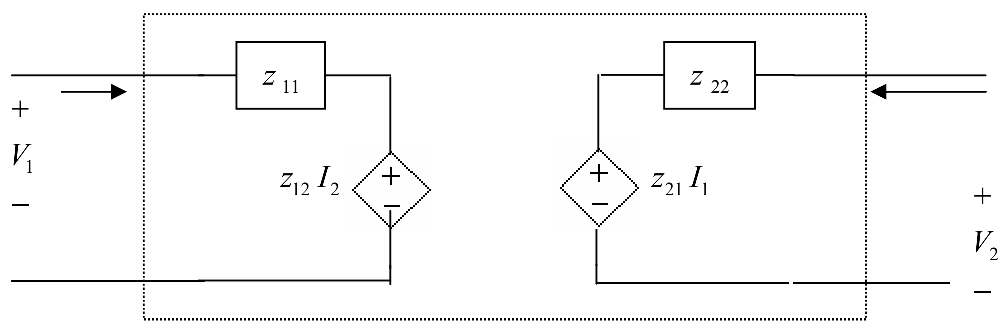


Figura 27.

El circuito equivalente, en términos de los parámetros de impedancia de circuito abierto se muestra en la figura 27.
Los parámetros de admitancia de cortocircuito se pueden determinar aplicando las técnicas de análisis previamente presentadas.

Ejemplo 13

Determine los parámetros de impedancia de circuito abierto para el circuito de la figura 28.

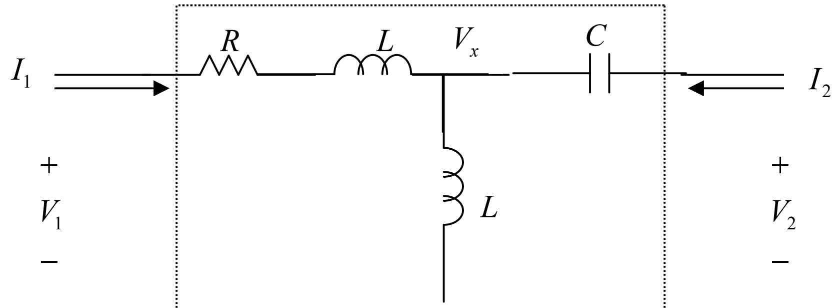


Figura 28.

Las ecuaciones del circuito son:

$$V_1 = (Ls + R)I_1 + Ls(I_1 + I_2) \quad V_2 = \frac{1}{Cs} I_2 + Ls(I_2 + I_1)$$

Por simple inspección, resulta la matriz de los parámetros de impedancia de circuito abierto, así:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Ls + R & Ls \\ Ls & Ls + \dfrac{1}{Cs} \end{bmatrix}$$

Relaciones entre los parámetros y ***y los parámetros*** z

A partir de los parámetros de admitancia de cortocircuito se pueden obtener los parámetros de impedancia de circuito abierto y viceversa, así:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por la inversa, se tiene que:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, la matriz de los parámetros de impedancia de circuito abierto es la inversa de la matriz de parámetros de admitancia de cortocircuito.

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

De manera similar, la matriz: y es la inversa de la matriz: z .

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

Ejemplo 14

A partir de los parámetros de impedancia de circuito abierto obtenidos en el ejemplo anterior, determine los parámetros de admitancia de cortocircuito.

Solución

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2Ls + R & Ls \\ Ls & Ls + \dfrac{1}{Cs} \end{bmatrix}^{-1}$$

Desarrollando la inversa, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{LCs^2 + 1}{L^2Cs^3 + RLCs^2 + 2Ls + R} & \dfrac{-LCs^2}{L^2Cs^3 + RLCs^2 + 2Ls + R} \\ \dfrac{-LCs^2}{L^2Cs^3 + RLCs^2 + 2Ls + R} & \dfrac{2LCs^2 + RCs}{L^2Cs^3 + RLCs^2 + 2Ls + R} \end{bmatrix}$$

Puede verse que el resultado obtenido es idéntico al encontrado en el ejemplo 1. En general, la inversa de la matriz de parámetros z , es:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{y_{22}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} & \dfrac{-y_{12}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} \\ \dfrac{-y_{21}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} & \dfrac{y_{11}}{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} \end{bmatrix}$$

Parámetros híbridos

Aunque se pueden definir dos tipos de parámetros híbridos, nos limitaremos a los parámetros más comúnmente utilizados, en los que las variables independientes son la corriente de entrada y el voltaje de salida. Así las cosas, las ecuaciones del circuito son:

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$
$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$

En forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Con base en las ecuaciones del circuito, los parámetros híbridos se definen de la siguiente manera:

$$h_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|V_2=0 \quad h_{21}=\left.\frac{I_2}{I_1}\right|V_2=0 \quad h_{12}=\left.\frac{V_1}{V_2}\right|I_1=0 \quad h_{22}=\left.\frac{I_2}{V_2}\right|I_1=0$$

El circuito equivalente, en términos de los parámetros híbridos, se muestra en la figura 29. Los parámetros de admitancia de cortocircuito se pueden determinar aplicando las técnicas de análisis previamente presentadas. Los parámetros híbridos no tienen las mismas unidades; lo anterior puede verse analizando las definiciones de arriba. Usualmente se utilizan los parámetros híbridos para modelar el transistor bipolar a bajas frecuencias.

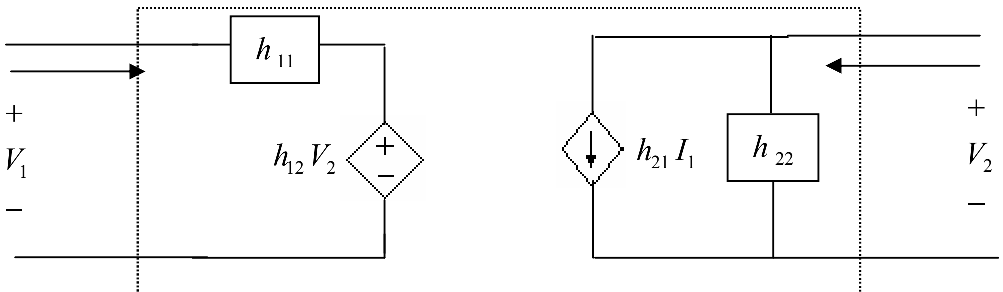


Figura 29.

EJERCICIOS CAPÍTULO I

Ejercicios de Sistemas Lineales Invariantes

1) Un sistema lineal invariante, inicialmente en reposo, está regido por la siguiente ecuación diferencial: $\left(D^3+3D^2+2D+6\right)y(t)=(D^2+D)x(t)$

a) Encuentre la función de transferencia del sistema y dibuje el diagrama de polos y ceros.
b) Encuentre la repuesta natural del circuito y represente gráficamente.
c) Encuentre la respuesta al escalón unitario y represente gráficamente.

2) La respuesta al escalón unitario de un sistema lineal invariante está dada por:

$$ye(t)=\left[\operatorname{sen}(t)-t\cos(t)\right]u(t)$$

a) Encuentre la respuesta natural del sistema.
b) Encuentre la función de transferencia y dibuje el diagrama de polos y ceros.
c) Encuentre la respuesta del sistema ante las siguientes excitaciones:

$$x_1(t)=tu(t),\ x_2(t)=te^{-t}u(t),\ x_3(t)=\cos(t)u(t)$$

3) La función de transferencia de un sistema lineal invariante está dada por:

$$H(s)=\frac{s^3+6s}{s^4+2s^3+6s^2+2s+5}$$

a) Dibuje el diagrama de polos y ceros.
b) Encuentre la respuesta natural.
c) Encuentre la respuesta del sistema ante cada una de las siguientes excitaciones (Solamente la forma, es decir, no determine las constante del desarrollo en fracciones parciales):

$$x_1(t) = u(t),\ x_2(t) = \text{sen}(t\sqrt{6})u(t),\ x_3(t) = \cos(t)u(t),\ x_4(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t).$$

4) El diagrama de polos y ceros de la función de transferencia de un sistema es el siguiente:

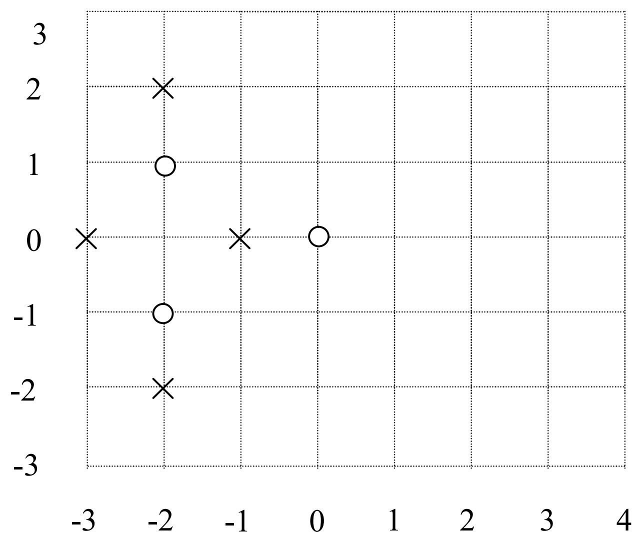


Figura 30.

a) Encuentre la función de transferencia sabiendo que: $|H(-2)| = 1$
b) Determine la forma de la respuesta del sistema ante las siguientes excitaciones:
$x_1(t) = u(t)$ $x_2(t) = e^{-2t}\cos(t)u(t)$ $x_3(t) = te^{-t}u(t)$ $x_4(t) = e^{-2t}u(t)$ $x_5(t) = e^{-2t}\,\text{sen}(t)u(t)$

5) La función de transferencia de un filtro pasabajas de segundo orden está dada por:

$$H(s) = \frac{\omega_p^{\,2}}{s^2 + 2z\omega_p s + \omega_p^{\,2}}$$

Donde ω_p es la frecuencia de paso, esto es, cuando la excitación es una señal senoidal de frecuencia inferior a ω_p, la salida, en estado estacionario, es otra señal senoidal con la misma amplitud, mientras que si la frecuencia de la señal de entrada es superior a ω_p la salida es prácticamente cero.
De otro lado, z es el coeficiente de amortiguamiento y toma valores en el intervalo $z > 0$.
Cuando $0 < z < 1$ se dice que el movimiento es subamortiguado.
Cuando $z = 1$ se dice que el movimiento es críticamente amortiguado.
Cuando $z > 1$ se dice que el movimiento es sobreamortiguado.
Con la información anterior:

a) Tome $\omega_p = 2 \quad z = 1.25$ y determine la respuesta ante las siguientes excitaciones y represente gráficamente.

$$x_1(t) = u(t) \quad x_2(t) = e^{-t} \quad x_3(t) = \text{sen}(0.5t)u(t) \quad x_4(y) = \text{sen}(5t)u(t)$$

b) Repita el paso anterior con los siguientes datos: $\omega_p = 2 \quad z = 1$

c) Repita el paso anterior con los siguientes datos: $\omega_p = \sqrt{5} \quad z = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

6) La función de transferencia de un filtro pasabanda de segundo orden está dada por:

$H(s) = \dfrac{Bs}{s^2 + Bs + \omega_0^{\,2}}$. Donde: B es el ancho de banda y ω_0 es la frecuencia central.

El funcionamiento del sistema es el siguiente: Cuando la excitación es una señal senoidal de frecuencia ω_0, la salida es también una señal senoidal con la misma amplitud. Cualquier excitación que tenga una frecuencia diferente de ω_0 conducirá a una respuesta de amplitud mucho menor que la amplitud de la señal de entrada.
Con base en la información presentada:

a) Tome $B = 2 \quad \omega_0 = \sqrt{5}$ y encuentre la respuesta ante las siguientes excitaciones y represente gráficamente:

$$x_1(t) = u(t) \quad x_2(t) = e^{-t}\,\text{sen}(2t)u(t) \quad x_3(t) = \text{sen}(0.5t)u(t) \quad x_4(t) = \text{sen}(t\sqrt{5})u(t)$$

b) Repita el paso anterior con los siguientes datos: $B = 1 \quad \omega_0 = \sqrt{5}$

c) Repita el paso anterior con los siguientes datos: $B = 0.2 \quad \omega_0 = \sqrt{5}$

7) La función de transferencia de un sistema lineal invariante está dada por:

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

a) Dibuje el diagrama de polos y ceros.
b) Determine la respuesta natural y represente gráficamente.
c) Determine la respuesta al escalón unitario y represente gráficamente.
d) Determine la respuesta del sistema ante las siguientes excitaciones y represente gráficamente.

$$x_1(t) = e^{-\frac{t}{2}}\cos(t)u(t) \quad x_2(t) = \cos(3t)u(t) \quad x_3(t) = \text{sen}(t)u(t)$$

8) La función de transferencia de un sistema está dada por:

$$H(s) = \frac{s^2 + 0.2s + 10}{s^2 + 2s + 10}$$

a) Determine la respuesta al escalón unitario y represente gráficamente.
b) Determine la respuesta del sistema ante las siguientes excitaciones y represente gráficamente.

$x_1(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(3t)u(t) \quad x_2(t) = \cos(t)u(t) \quad x_3(t) = \cos(10t)u(t) \quad x_4(t) = \mathrm{sen}(t\sqrt{10})u(t)$

9) La función de transferencia de un sistema lineal invariante está dada por:

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 + Ks + 1}$$

a) Dibuje el diagrama de polos y ceros para diferentes valores de K.
b) Determine la respuesta ante las siguientes excitaciones y represente gráficamente.

$x_1(t) = u(t) \quad x_2(t) = e^{-t}u(t) \quad x_3(t) = \mathrm{sen}(t)u(t) \quad x_4(t) = \mathrm{sen}(2t)u(t)$ .Tome: $K = 1$

Ejercicios de Estabilidad

1) Determine los valores de k, de tal manera que los siguientes polinomios sean de Hurwitz.

a) $P(s) = s^4 + 3s^3 + ks^2 + 5s + 4$
b) $P(s) = s^4 + ks^2 + 3$
c) $P(s) = s^3 + ks^2 + 3s + 2k$
d) $P(s) = s^5 + 3s^3 + ks$

2) Responda si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique:

a) Si un polinomio tiene sus coeficientes positivos entonces es de Hurwitz.
b) Si el denominador de la función de transferencia es un polinomio de Hurwitz entonces el sistema es estable o marginalmente estable.
c) El producto de dos polinomios de Hurwitz es de Hurwitz.
d) Una combinación lineal de dos polinomios de Hurwitz es de Hurwitz.
e) Si un sistema tiene la función de transferencia: $H(s) = \dfrac{s+1}{s^5 + 2s^2 + 1}$, es estable.

3) Determine los valores de K para que la siguiente función circuital tenga sus polos y ceros reales y alternados:

$$F(s)=\frac{s^2+3s+2}{s^3+Ks^2+8s}$$

Ejercicios de Técnicas de Simplificación de Circuitos

1) Para el circuito de la figura 9

a) Escoja los valores de los elementos tales que: $\omega_n = 120\pi$ y $2\alpha = \omega_n\sqrt{2}$
b) Determine la respuesta del circuito ante las siguientes excitaciones: $u(t), \text{sen}(60\pi t)u(t), \text{sen}(600\pi t)u(t)$

2) En el circuito de la figura 9, intercambie el inductor y el capacitor y:

a) Encuentre la ganancia de voltaje.
b) Repita el ejercicio anterior.

3) Para el circuito de la figura 14, tome los siguientes datos: $R=3$, $C=0.5$, $L=2$ y repita el procedimiento del ejemplo 9.

4) Para el circuito de la figura 18, repita el procedimiento del ejemplo 10 con: $k=0.5 \quad 0.25$

5) Para el circuito de la figura 31, repita el problema anterior.

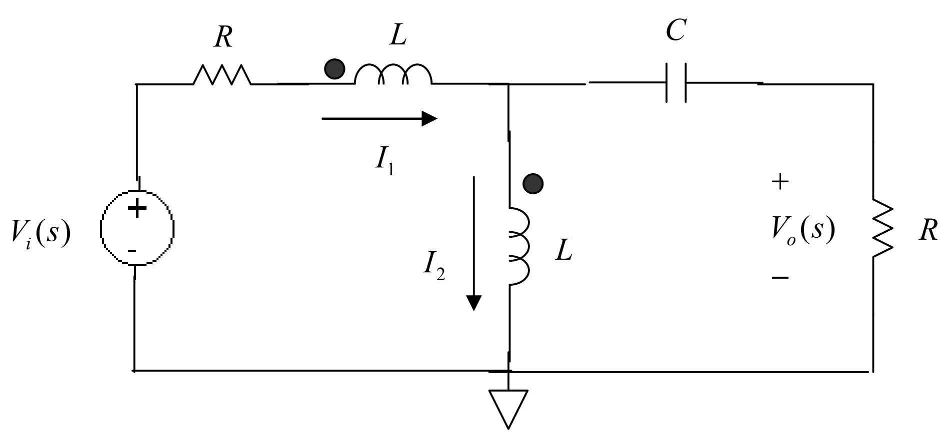


Figura 31

6) Determine la función de transferencia y la respuesta al escalón unitario para el circuito de la figura 32. Tome valores apropiados para α, R, C

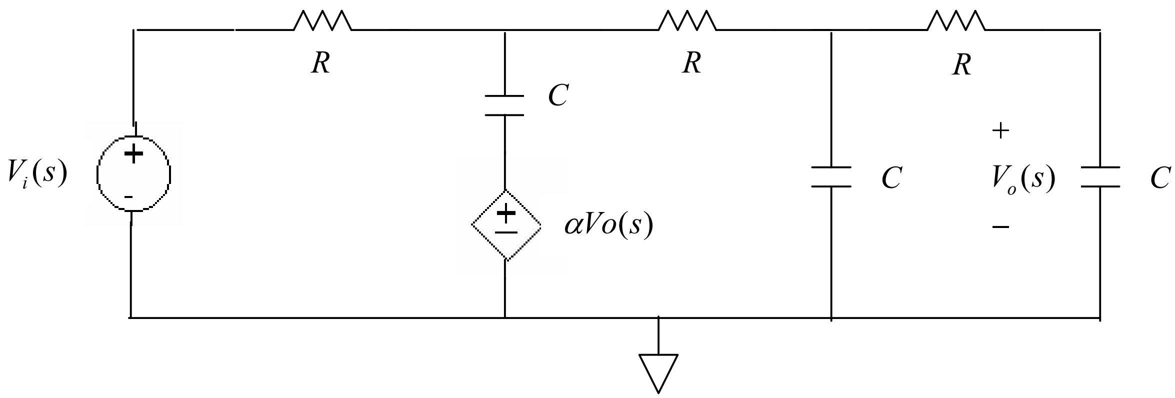


Figura 32.

7) Repita el problema anterior si en la figura 32 se intercambian los capacitores con los resistores.

Ejercicios de Redes de dos Puertos

1) La figura 33 muestra un circuito estrella. Determine:

a) Los parámetros de impedancia de circuito abierto
b) Los parámetros de admitancia de cortocircuito.

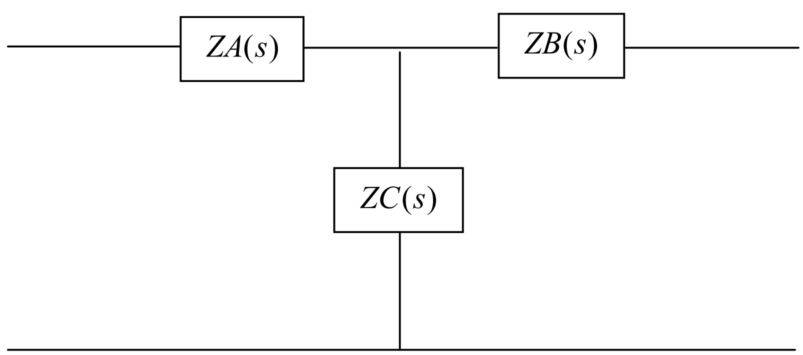


Figura 33.

2) Repita el ejercicio anterior para el circuito delta de la figura 34.

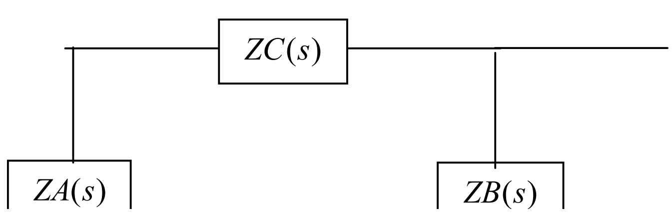


Figura 34.

3) Encuentre las fórmulas de transformación de los parámetros de admitancia de cortocircuito a partir de los parámetros híbridos.

4) Determine los parámetros de admitancia de cortocircuito para el circuito de la figura 35.

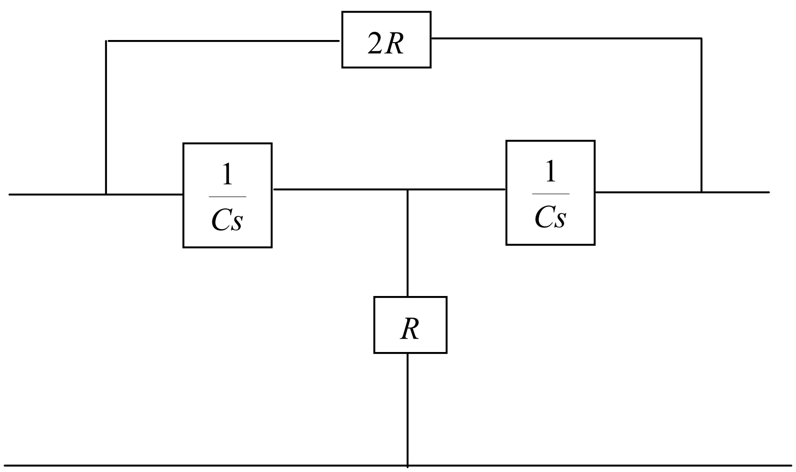
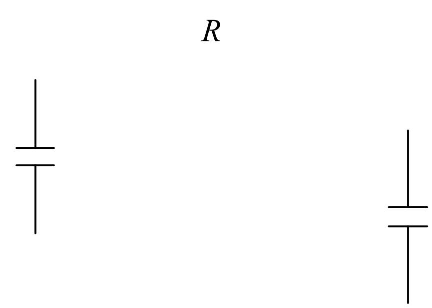


Figura 35.

5) Para el circuito de la figura 35 se coloca una fuente ideal de voltaje a la entrada y un resistor R a la salida.

a) Determine la función de transferencia.
b) Dibuje el diagrama de polos y ceros para un valor cualquiera de: RC.
c) Determine la respuesta al escalón unitario y represente gráficamente.

6) Determine los parámetros de impedancia de circuito abierto para el circuito de la figura 36.



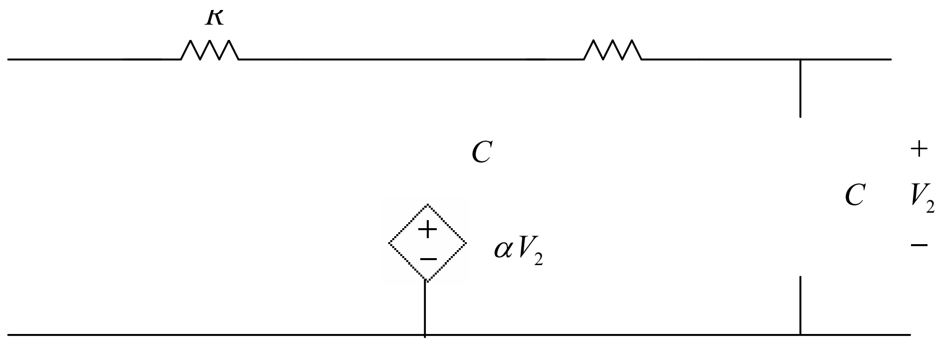


Figura 36.

7) Para el circuito de la figura anterior se coloca una fuente ideal de voltaje a la entrada y un resistor R a la salida.

a) Determine la función de transferencia.
b) Dibuje el diagrama de polos y ceros para un valor cualquiera de: RC y diferentes valores de α
c) Determine la respuesta al escalón unitario y represente gráficamente.

8) Para el circuito de la figura 37, determine los parámetros de impedancia de circuito abierto. $M = kL$. Con base en el resultado, determine los parámetros de admitancia de cortocircuito.

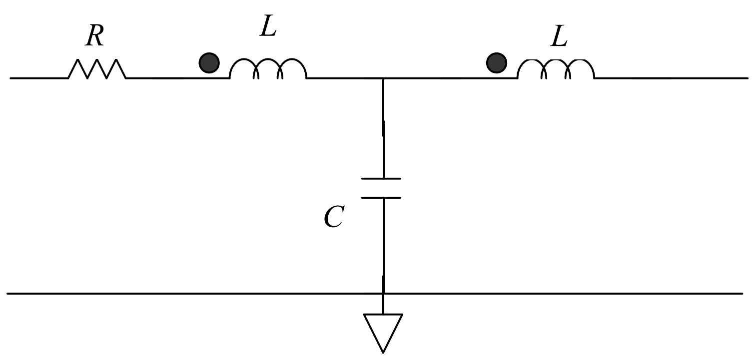
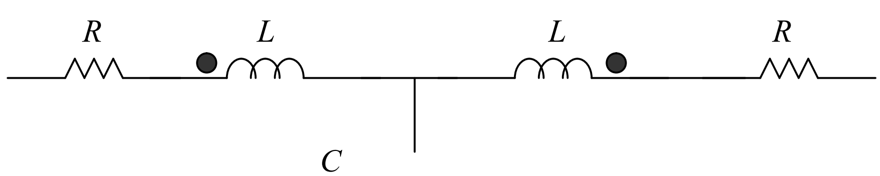


Figura 37.

9) Para el circuito de la figura anterior se coloca una fuente ideal de voltaje a la entrada y un resistor R a la salida.

a) Determine la función de transferencia.
b) Dibuje el diagrama de polos y ceros para un valor cualquiera de: R, L, C y diferentes valores de k
c) Determine la respuesta al escalón unitario y represente gráficamente.

10) Considere el circuito de la figura 38.



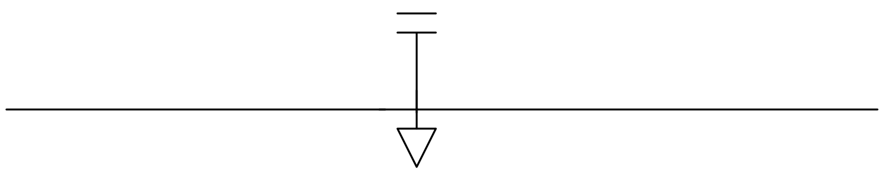


Figura 38.

Determine los parámetros de impedancia de circuito abierto. $M = kL$. Con base en el resultado, determine los parámetros de admitancia de cortocircuito.

11) Para el circuito de la figura anterior:

a) Determine la función de transferencia cuando se excita con una fuente ideal de voltaje y se le conecta una carga: R.
b) Tome diferentes valores para los parámetros y determine la respuesta al escalón unitario.

12) Repita el problema anterior si en el circuito se intercambian el capacitor C y el resistor de entrada.