FILTROS ACTIVOS DE ORDEN DOS

A continuación se presentan algunas estructuras básicas muy útiles en el diseño de filtros activos.

1. Filtro Pasabajas.

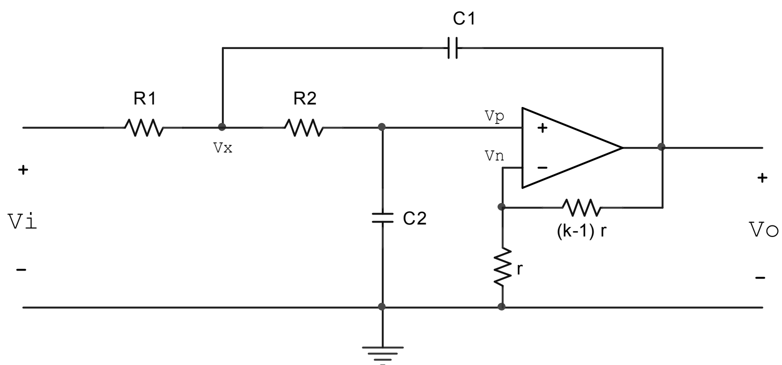

Figura No. 1

Analizando el circuito, tenemos: $V_n = \frac{1}{k} V_o$

$$V_p = V_n \Rightarrow V_p = \frac{1}{k} V_o \Rightarrow V_o = kV_p$$

Planteando la ley de Kirchoff para corrientes en los nodos, Vx y Vp tenemos:

1) $\dfrac{V_i - V_x}{R_1} = \dfrac{V_x - V_p}{R_2} + C_1 s\left(V_x - kV_p\right)$

2) $\dfrac{V_x - V_p}{R_2} = C_2 s V_p$

Resolviendo simultáneamente, tenemos que la función de atenuación del circuito esta dada por:

$$A(s) = \frac{V_i}{V_o} = \frac{s^2 + \left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1-k}{R_2C_2}\right)s + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{k\left(\frac{1}{R_1R_2C_1C_2}\right)}$$

$$A(s) = \frac{V_i}{V_o} = \frac{s^2 + 2\alpha s + \omega_n{}^2}{k\omega_n{}^2}$$

Ejemplo 1

Diseñar un filtro activo de orden 2, tipo Butterworth, con las características siguientes:
$A\max = 1\text{dB}, \omega_p = 120\pi$

Solución

La función de atenuación, en este caso es:

$$A(S) = 1 + \sqrt{2}S + S^2; \qquad S = \varepsilon^{1/2}\frac{s}{\omega_p}; \qquad \varepsilon \le \sqrt{10^{0.1A\max} - 1} \Rightarrow \varepsilon \le 0.5088$$

En consecuencia tenemos:

$$A(s) = 1 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{528.5}\right) + \left(\frac{s}{528.5}\right)^2 \Rightarrow A(s) = \frac{s^2 + 528\sqrt{2}s + 528^2}{528^2}$$

Comparando con la función de atenuación del filtro, esto es:

$$A(s) = \frac{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^{\ 2}}{k\omega_n^{\ 2}}, \text{ tenemos: } 2\alpha = 528\sqrt{2}; \qquad \omega_n^{\ 2} = 528^2; \qquad k = 1$$

de donde resultan dos ecuaciones así:

$$1)\ \frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} = 528\sqrt{2}$$

$$2)\ \frac{1}{R_1C_1R_2C_2} = 528^2$$

Como vemos, se trata de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas. Si imponemos que $R_1 = R_2 = 10k$, tenemos:

$$1)\ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = 528\sqrt{2} * 10^4 \Rightarrow C_1 = 268\text{nF}$$

$$2)\ \frac{1}{C_1C_2} = 528^2 * 10^8 \Rightarrow C_2 = 134\text{nF}$$

El circuito resultante se muestra en la figura No. 2.

Ejemplo 2

Diseñe un filtro Chebyshev de orden 2 con las características: $A\max = 1\text{dB}, \omega_p = 120\pi$

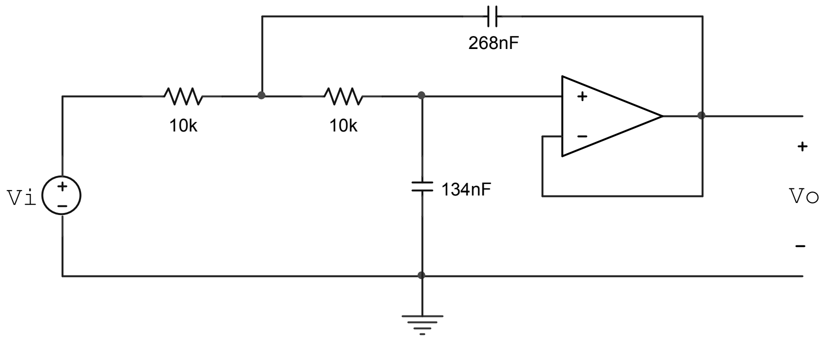

Figura No. 2

Solución:

La función de atenuación en este caso es:

$$A(S)=\frac{S^2+1.0977S+1.1025}{0.9826}; \qquad S=\frac{s}{\omega_p}$$

$$A(s)=\frac{\left(s/\omega_p\right)^2+1.0977\left(s/\omega_p\right)+1.1025}{0.9826}$$

$$A(s)=\frac{s^2+1.0977\omega_p s+1.1025\omega_p{}^2}{0.9826\omega_p{}^2}$$

$$A(s)=\frac{s^2+1.0977\omega_p s+1.1025\omega_p{}^2}{0.8912\left(1.1025\omega_p{}^2\right)}$$

$$A(s)=\frac{s^2+2\alpha s+\omega_n{}^2}{k\omega_n{}^2}; \qquad k=0.8912$$

Es claro que, puesto que k debe ser mayor que la unidad, la realización del circuito requiere de una etapa atenuadora, veamos:

Realicemos la parte de atenuación:

$$\widehat{A}(s)=\frac{s^2+1.0977\omega_p s+1.1025\omega_p{}^2}{1.1025\omega_p{}^2}; \qquad \omega_p=120\pi$$

Comparando con la función de atenuación del circuito pasabajas, con k=1, tenemos:

$$1)\ \frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}=413.82 \qquad 2)\ \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}=0.1567\text{x}10^6$$

imponemos que $R_1 = R_2 = 10k$

Resolviendo 1 y 2, encontramos:

$C_1 = 484nF$ y $C_2 = 132nF$.

El circuito resultante, teniendo en cuenta el valor de k = 0.8912, es el de la Figura No. 3.

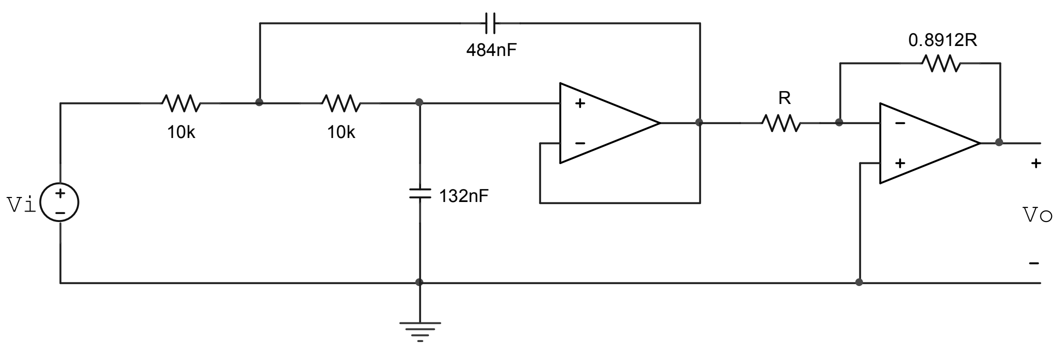

Figura No. 3

$$\frac{V_o}{V_i} = -0.8912 \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n{}^2}; \qquad \alpha = 206.91, \quad \omega_n = 395.84$$

2. Filtro Pasaaltas

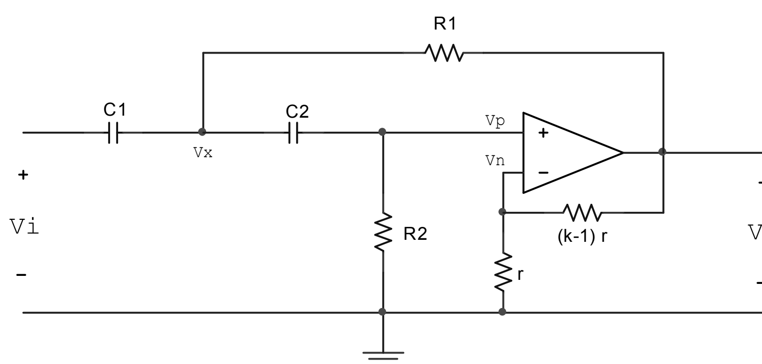

Figura No. 4

Analizando el circuito, tenemos: $V_n = \frac{1}{k} V_o$

$$V_p = V_n \Rightarrow V_p = \frac{1}{k} V_o \Rightarrow V_o = kV_p$$

Planteando la ley de Kirchoff para corrientes en los nodos, Vx y Vp tenemos:

1) $C_1s(V_i - V_x) = C_2s(V_x - V_p) + \dfrac{V_x - kV_p}{R_1}$

2) $C_2s(V_x - V_p) = \dfrac{V_p}{R_2} \Rightarrow C_2sV_x = \left(C_2s + \dfrac{1}{R_2}\right)V_p$

Resolviendo simultáneamente, tenemos que la función de atenuación del circuito esta dada por:

$$A(s) = \frac{V_i}{V_o} = \frac{s^2 + 2\alpha s + \omega_n{}^2}{ks^2}$$

$$\text{donde} \quad 2\alpha = \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1-k}{R_1C_1} \text{ y } \omega_n{}^2 = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}$$

Ejemplo 3

Diseño un filtro Butterworth de orden dos con: $A\max = 0.5\text{dB}, \omega_p = 2\pi x10^4$

Solución

Mediante el cambio de variable : $\widehat{S} = \dfrac{\omega_p}{S}, S = \varepsilon^{1/2}s$, tenemos:

$$A(\widehat{S}) = \widehat{S}^2 + \sqrt{2}\widehat{S} + 1; \qquad \varepsilon \le \sqrt{10^{0.1A\max} - 1} \Rightarrow \varepsilon \le 0.3493 \to \widehat{S} = \frac{2\pi x10^4}{\varepsilon^{1/2}s} \Rightarrow \widehat{S} = \frac{106311.6}{s}$$

de donde $A(s) = \left(\dfrac{\omega_n}{s}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\dfrac{\omega_n}{s}\right) + 1 \Rightarrow A(s) = \dfrac{s^2 + \sqrt{2}\omega_n s + \omega_n{}^2}{s^2}; \quad \omega_n = 106311.6$

comparando con la función de atenuación del circuito pasaaltas, tenemos: k=1

1) $\dfrac{1}{R_2C_2} + \dfrac{1}{R_2C_1} = 150347.31$

2) $\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2} = 1.1302x10^{10}$

Imponiendo que $C_1 = C_2 = 1\text{nF}$, encontramos:

$R_2 = 13.3\text{k}$; $R_1 = 6.65\text{k}$

El circuito resultante se muestra en la figura No. 5.

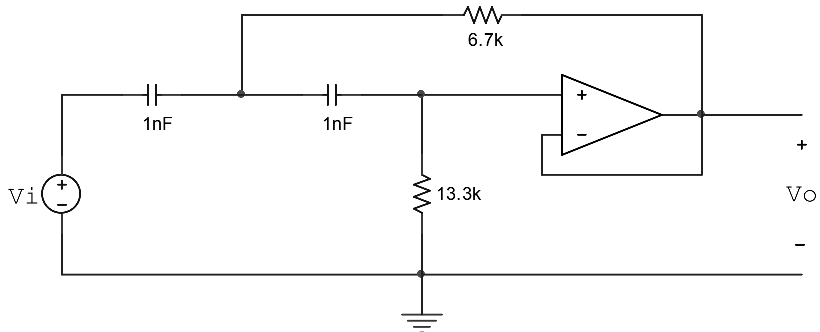

Figura No. 5

Ejemplo 4

Diseño un filtro pasaaltas Chebyshev de segundo orden con: $A\max = 0.5\text{dB}, \omega_p = 2\pi x10^4$

Solución

El equivalente pasabajas está dado por:

$$A(S) = \frac{S^2 + 1.4256S + 1.5162}{1.4314}; \quad S = \left(\frac{\omega_p}{s}\right)$$

$$A(s) = \frac{\left(\frac{\omega_p}{s}\right)^2 + 1.4256\left(\frac{\omega_p}{s}\right) + 1.5162}{1.4314}$$

$$A(s) = \frac{1.5162s^2 + 1.4256\omega_p s + \omega_p^{\ 2}}{1.4314s^2}; \quad \omega_p = 2\pi x10^4$$

$$A(s) = \frac{s^2 + 0.9402\omega_p s + 0.6595\omega_p^{\ 2}}{0.944s^2}$$

$$T(s) = 0.944\frac{s^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^{\ 2}}$$

Como vemos, se requiere de una etapa atenuadora por comparación, tenemos (para k=1)

$$1)\ \frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_1} = 59074.51$$

$$2)\ \frac{1}{R_1R_2C_1C_2} = 2.6036x10^9$$

Imponiendo que $C_1 = C_2 = 1\text{nF}$, tenemos:

$R_2 = 33.9\text{k}$, $R_1 = 11.33\text{k}$.

El circuito resultante se muestra en la Figura No. 6.

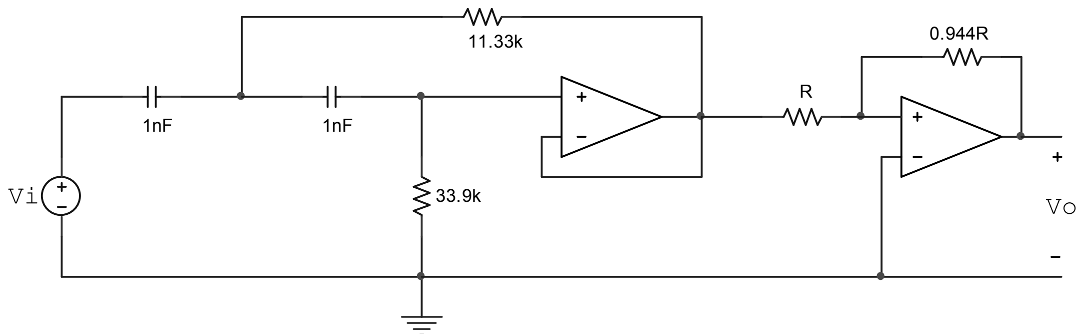

Figura No. 6.

3. Filtros Pasabanda

Una forma particular para diseñar un filtro pasabanda consiste en colocar en cascada un filtro pasabajas y uno pasaaltas como se muestra en la Figura No. 7:

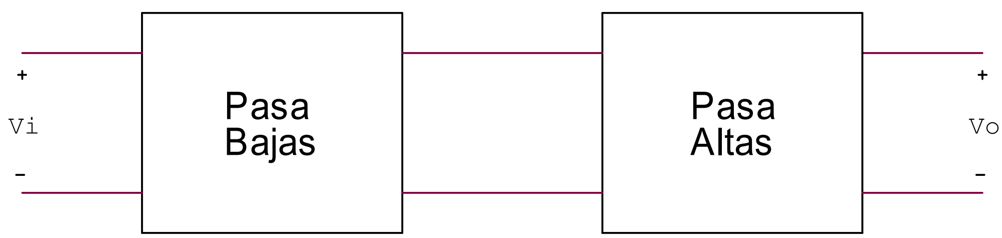

Figura No. 7.

La función de atenuación del circuito mostrado es:

$$A(s) = \frac{k_L \omega_2^{\,2}}{s^2 + 2\alpha_2 s + \omega_2^{\,2}} * \frac{k_H s^2}{s^2 + 2\alpha_1 s + \omega_1^{\,2}}$$

El diagrama de Bode de la función de atenuación pasabanda es la suma de los diagramas de Bode de las funciones : $A_L(s)$ y $A_H(s)$, así:

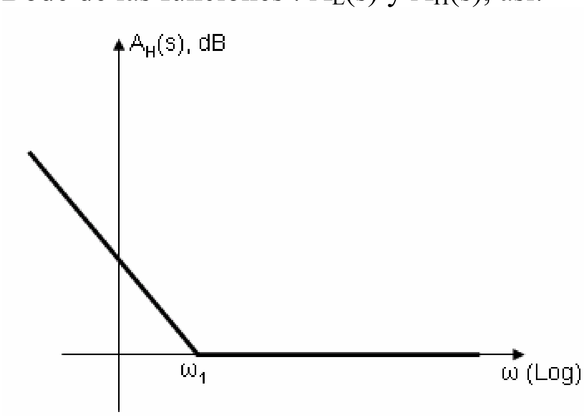

Figura No. 8.

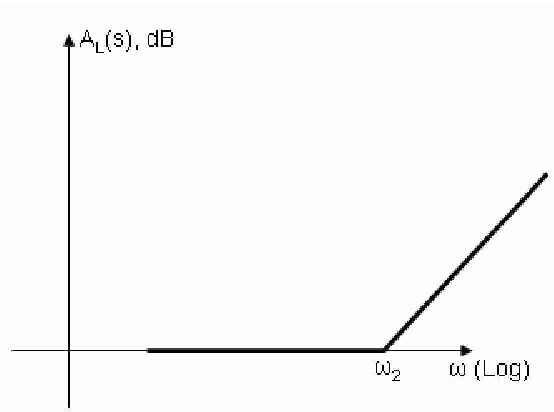

Figura No. 9.

Al sumar las funciones de atenuación, tenemos:

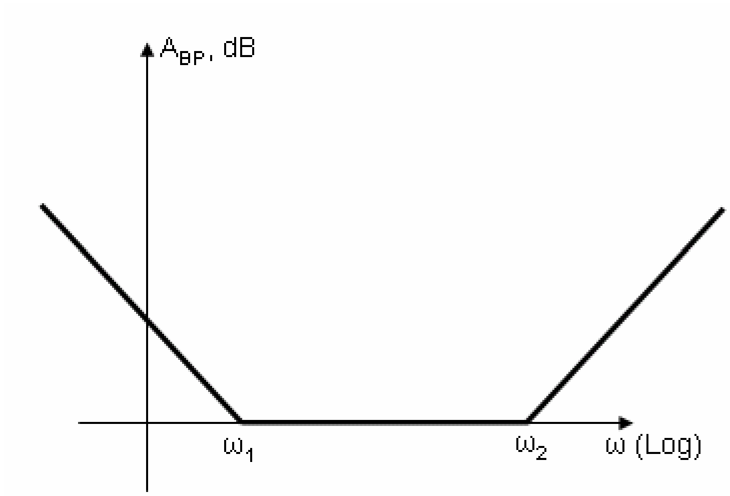

Figura No. 10.

La estructura circuital se utiliza muy a menudo para diseñar filtros de banda ancha, veamos:

Ejemplo 5

Diseñe un filtro de tipo Butterworth con la característica :
$B = 2\pi x10^4 \, rad/seg;\ \omega_1 = 2\pi x10^3 \, rad/seg;\ A\max = 1dB$

Solución

Puesto que : $B = \omega_2 - \omega_1$, entonces : $\omega_2 = 2.1\pi x10^4$
$\omega_o{}^2 = \omega_1\omega_2 \Rightarrow \omega_o{}^2 = 4.2\pi^2 x10^7 \Rightarrow \omega_o \cong 2.036x10^4 \, rad/seg$
Debemos diseñar los filtros pasabajas y pasaaltas así:

a) Filtro pasabajas: $\omega_p = 2.1\pi x10^4;\quad A\max = 1dB$
la función de atenuación correspondiente es:

$$A(S) = S^2 + \sqrt{2}S + 1; \qquad S = \varepsilon^{1/2}\frac{s}{\omega_p}$$

$$\varepsilon \le \sqrt{10^{0.1A\max} - 1} \Rightarrow \varepsilon \le 0.5088 \Rightarrow S = \frac{s}{92490}$$

$$A(s) = \left(\frac{s}{92490}\right)^2 + \sqrt{2}\left(\frac{s}{92490}\right) + 1 \Rightarrow A(s) = \frac{s^2 + 130800s + 92490^2}{92490^2}, \quad k_L = 1$$

Comparando con la función de atenuación tenemos:

$$1)\ \frac{1}{R_1C_1}+\frac{1}{R_2C_1}=130800;\quad 2)\frac{1}{R_1C_1R_2C_2}=92490^2$$

Imponiendo $R_1 = R_2 = 10k$, resulta

$C_1 = 1.53nF$; $C_2 = 0.76nF$

$$\frac{V_{o1}}{V_i}=\frac{92490^2}{s^2+130800s+92490^2}$$

El circuito pasabajas resultante se muestra en la figura No. 11.

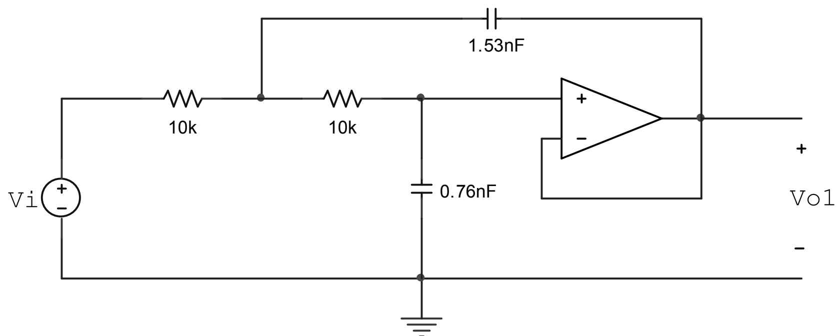

Figura No. 11.

b) Filtro Pasaaltas

$$A\max = 1dB \qquad \omega_p = 2\pi x10^3 \qquad \widehat{S}=\frac{\omega_p}{S} \qquad S=\varepsilon^{1/2}s$$

$$\widehat{S}=\frac{\varepsilon^{-1/2}\omega_p}{s}\Rightarrow \widehat{S}=\frac{8809}{s}$$

$$A(\widehat{S})=\widehat{S}^2+\sqrt{2}\widehat{S}+1\Rightarrow A(s)=\left(\frac{8809}{s}\right)^2+\sqrt{2}\left(\frac{8809}{s}\right)+1$$

$$A(s)=\frac{s^2+8809\sqrt{2}s+8809^2}{s^2}$$

Comparando con la función de atenuación del circuito pasaaltas, resulta:

$k_H = 1$

$$1)\quad \frac{1}{R_2C_2}+\frac{1}{R_2C_1}=12457 \qquad 2)\quad \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}=8809^2$$

Imponiendo $C_1 = C_2 = 10nF$, resulta:

$R_2 = 16k$, $R_1 = 8k$

$$\frac{V_{o2}}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + 12457s + 8809^2}$$

El circuito resultante pasaaltas se muestra en la Figura No. 12.

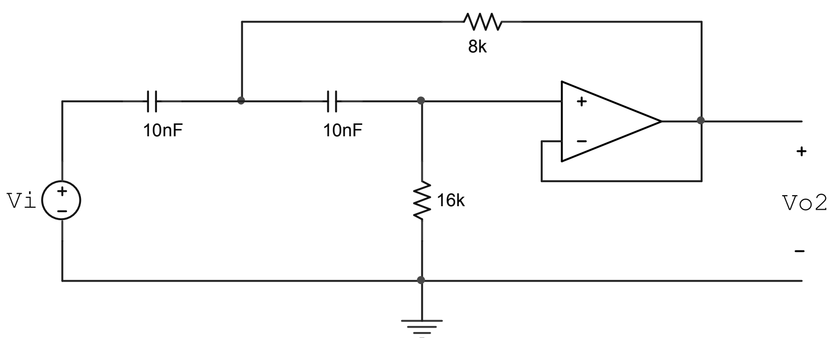

Figura No. 12.

A continuación se ilustra el circuito pasabanda resultante, cuya función de atenuación está dada por:

$$A_{BP}(s) = \frac{\left(s^2 + 12457s + 8809^2\right)\left(s^2 + 130800s + 92490^2\right)}{\left(92490^2\right)s^2}$$

$$A_{BP}(s) = \frac{s^4 + 143257s^3 + 1.026x10^{10}s^2 + 1.167x10^{14}s + 6.638x10^{17}}{8.5544x10^9 s^2}$$

Para analizar la función pasabanda, hacemos el escalado en frecuencia: $S = \frac{s}{\omega_p}$

$$A(S) = \frac{S^4 + 7.036S^3 + 24.751S^2 + 13.850S + 3.9332}{20.636S^2}$$

El diagrama de Bode de la función anterior será el siguiente:

ω	A_{BP}, dB
$0.1\omega_o$	25.6
$0.16\omega_o$	17.7
$0.25\omega_o$	10.40
$0.4\omega_o$	3.80
$0.63\omega_o$	0.83
ω_o	0.13
$1.6\omega_o$	0.07
$2.51\omega_o$	0.38
$4\omega_o$	2
$6.3\omega_o$	6.7
$10\omega_o$	13.9

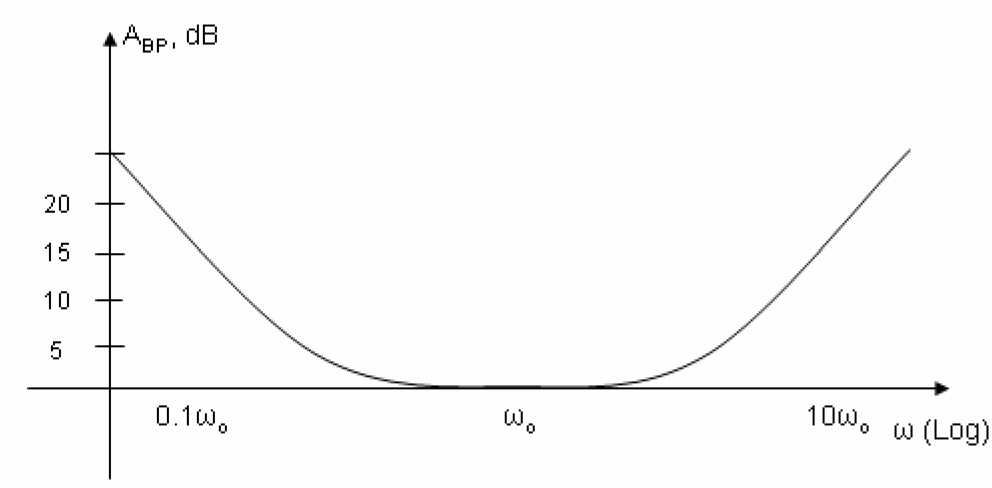

Figura No. 13.

La banda que efectivamente "pasa" está ubicada en el intervalo $0.6\omega_o \leq \omega \leq 3\omega_o$.

Es decir, el ancho de banda efectivo es B=7.8kHz, con F_1 = 2kHz, F_2 = 9.8kHz.

El estudiante puede efectuar la simulación del circuito pasabanda y verificar los resultados.

Un filtro pasabanda de orden dos puede realizarse con la siguiente topología conocida como "Sallen and Key", veamos:

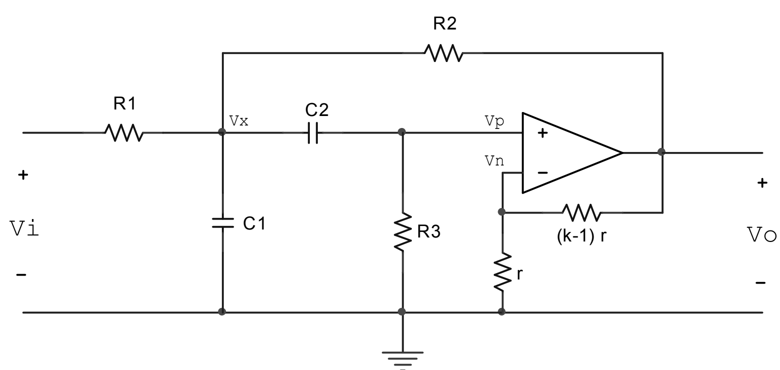

Figura No. 14.

Analizando el circuito tenemos: $V_p = \dfrac{V_o}{k}; \quad k > 1$

Las ecuaciones de nodo son:

1) $$\frac{V_i - V_x}{R_1} = C_1 s V_x + C_2 s\left(V_x - V_p\right) + \frac{V_x - kV_p}{R_2}$$

2) $$C_2 s\left(V_x - V_p\right) = \frac{V_p}{R_3} \Rightarrow C_2 s V_x = \left(C_2 s + \frac{1}{R_3}\right) V_p$$

resolviendo el sistema, resulta la función de atenuación:

$$A(s)=\frac{s^2+Bs+\omega_o{}^2}{k_o Bs};\quad \text{donde}\ B=\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1-k}{R_2C_1}+\frac{1}{R_3C_1}+\frac{1}{R_3C_2}$$

$$\omega_n{}^2=\frac{R_1+R_2}{R_1R_2R_3C_1C_2};\quad k_o=\frac{k}{R_1C_1B}$$

Ejemplo 6

Diseñe un filtro Butterworth de orden dos, con las siguientes características: $\omega_1=2\pi x10^3;\quad B=2\pi x10^4;\quad A\max=0.5\text{dB};$

Solución

Puesto que $\omega_2-\omega_1=B$, tenemos: $\omega_2=2.1\pi x10^4\qquad \omega_o{}^2=\omega_1\omega_2\to\omega_o=6.4807\pi x10^3$
La función de atenuación pasabajas es:

$$A(\widehat{S})=\widehat{S}+1;\qquad \widehat{S}=\varepsilon S;\quad S=\frac{s^2+\omega_o{}^2}{Bs};\quad \varepsilon\le\sqrt{10^{0.1A\max}-1}\Rightarrow\varepsilon\le 0.3493$$

Tenemos ahora:

$$A(s)=\varepsilon\frac{s^2+\omega_o{}^2}{Bs}+1=\frac{\varepsilon s^2+Bs+\varepsilon\omega_o{}^2}{Bs}\Rightarrow A(s)=\frac{s^2+B/_{\varepsilon}\,s+\omega_o{}^2}{B/_{\varepsilon}\,s}$$

$$A(s)=\frac{s^2+179879s+414518178.5}{179879s}$$

Comparando con la función de atenuación del circuito pasabanda tenemos:

1) $179879=\frac{1}{R_1C_1}+\frac{1-k}{R_2C_1}+\frac{1}{R_3C_1}+\frac{1}{R_3C_2}$

2) $\frac{R_1+R_2}{R_1R_2R_3C_1C_2}=414518178.5$

3) $\frac{k}{R_1C_1B}=1;\qquad k_o=1;\qquad k>1$

Intentemos algunas posibles soluciones al sistema, veamos:

Si imponemos que $R_1=R_2=R_3=R$, resulta:

1) $179879R=\frac{1}{C_1}+\frac{1-k}{C_1}+\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\Rightarrow\frac{3-k}{C_1}+\frac{1}{C_2}=179879R$

2) $\dfrac{2}{C_1C_2} = 414518178.5R^2$

3) $\dfrac{k}{C_1} = 179879R; \qquad k > 1$

3) en 1) $\Rightarrow \dfrac{3}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} = 359758R$

Sustituyendo ésta última ecuación en 2), tenemos:

$$\frac{2}{C_1}\left[359758R - \frac{3}{C_1}\right] = 414518178.5R^2 \Rightarrow \frac{6}{C_1^{\,2}} - \frac{719516R}{C_1} + 414518178R^2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{C_1}\right)^2 - 119919R\left(\frac{1}{C_1}\right) + 69086363R^2 = 0$$

Resolviendo tenemos:

$$\frac{1}{C_1} = \begin{Bmatrix} 119340R \\ 579R \end{Bmatrix}$$

Tomamos la solución que satisfaga la condición: k > 1, esto es: $179879RC_1 > 1$

Para $C_1 = \dfrac{1}{119340R}$; tenemos: k = 1.5072

Para $C_1 = \dfrac{1}{579R}$; tenemos: k = 310.67

Nos inclinamos por el valor k = 1.5072

En conclusión tenemos:

$R_1 = R_2 = R_3 = R$; k=1.5072

$C_1 = \dfrac{1}{119340R}$; $C_2 = \dfrac{1}{1738R}$

Si tomamos R=10k, el circuito resultante es el mostrado en la Figura No. 15.

La función de atenuación es:

$$A(s) = \frac{s^2 + 179879s + 414518178}{179879s}$$

Si efectuamos el escalado : $S = \dfrac{s}{\omega_o}$, tenemos:

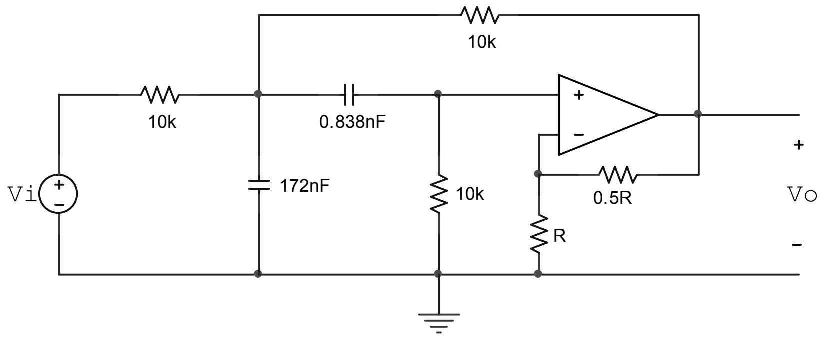

Figura No. 15.

$$A(S) = \frac{S^2 + 8.8349S + 1}{8.8349S}$$

El diagrama de Bode se ilustra a continuación:

ω	A dB
$0.1\omega_o$	3.53
$0.16\omega_o$	1.716
$0.25\omega_o$	0.71
$0.4\omega_o$	0.24
$0.63\omega_o$	0.05
ω_o	0
$1.16\omega_o$	0.05
$2.5\omega_o$	0.24
$4\omega_o$	0.71
$6.3\omega_o$	1.71
$10\omega_o$	3.53

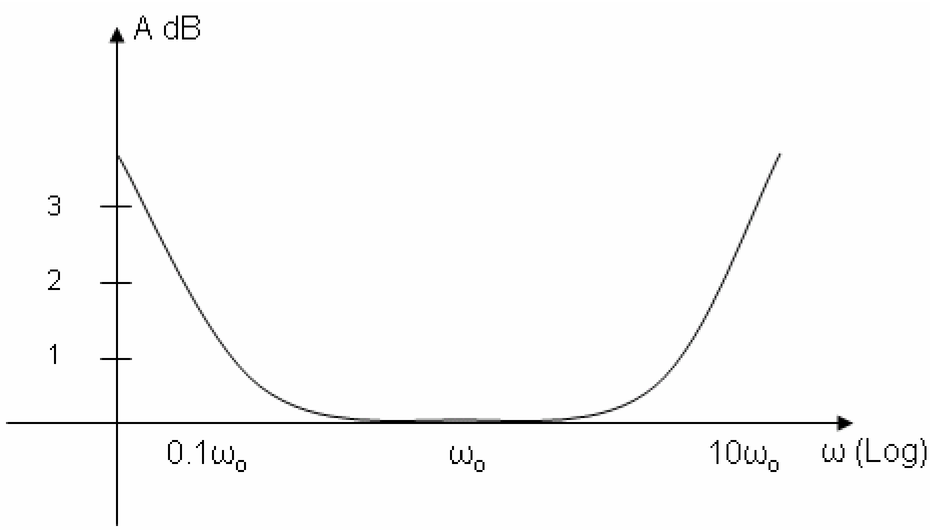

Figura No. 16.

El estudiante puede efectuar la simulación del circuito y verificar los resultados.

4. Filtro Rechazabanda

Consideremos el diagrama de bloques siguiente:

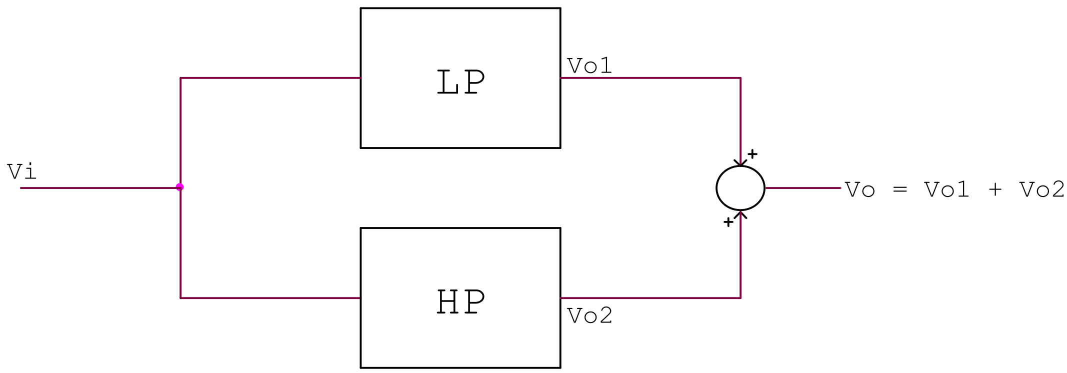

Figura No. 17.

Sabemos que : $\frac{V_{o1}}{V_i} = \frac{k_L \omega_1^{\ 2}}{s^2 + 2\alpha_1 s + \omega_1^{\ 2}}$ y $\frac{V_{o2}}{V_i} = \frac{k_H s^2}{s^2 + 2\alpha_2 s + \omega_2^{\ 2}}$

En consecuencia tenemos:

$\frac{V_o}{V_i} = \frac{k_H s^2 + k_L \omega_1^{\ 2}}{\left(s^2 + 2\alpha s + \omega^2\right)}$; para $\omega_1 = \omega_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2$

Si adicionalmente tomamos $k_L = 1$ y $k_H = 1$, resulta la función de atenuación:

$$A(s) = \frac{s^2 + Bs + \omega_o^{\ 2}}{s^2 + \omega_o^{\ 2}}$$

justamente, la función de atenuación corresponde a un filtro rechazabanda con un ancho de banda B y una frecuencia central ω_o.

El diagrama de Bode de la función de atenuación se muestra en la Figura No. 18.

Ejemplo 7

Realice, usando el circuito mencionado, la característica de atenuación rechazabanda :
$\omega_o = 2\pi x10^4; \qquad B = 3\pi x10^4; \qquad \omega_1 = \pi x10^4; \qquad A\max = 1dB$

Solución
Encontremos la realización de tipo Butterworth de orden dos, veamos:

$\omega_2 = \frac{\omega_o^{\ 2}}{\omega_1} \Rightarrow \omega_2 = 4\pi x10^4$

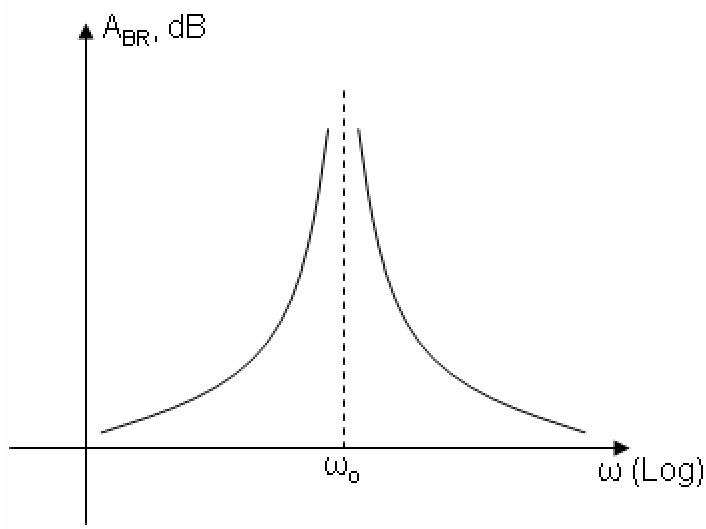

Figura No. 18.

Esquemáticamente, la característica de atenuación es:

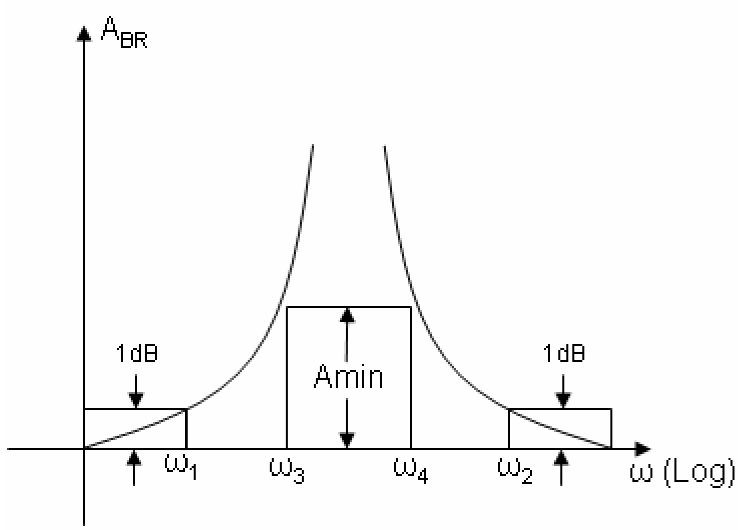

Figura No. 19.

La función de atenuación pasabajas es:

$$A(\hat{S}) = 1 + \hat{S}; \qquad \hat{S} = \varepsilon S; \qquad S = \frac{Bs}{s^2 + {\omega_o}^2}$$

$$A(s) = 1 + \varepsilon \frac{Bs}{s^2 + {\omega_o}^2} \Rightarrow A(s) = \frac{s^2 + \varepsilon Bs + {\omega_o}^2}{s^2 + {\omega_o}^2}$$

$$T(s) = \frac{s^2 + {\omega_o}^2}{s^2 + \varepsilon Bs + {\omega_o}^2}; \qquad \varepsilon \leq 0.5088$$

$$T(s) = \frac{s^2 + 62832^2}{s^2 + 47953s + 62832^2}; \qquad \text{tomamos } \varepsilon = 0.5$$

Como se indicó al principio, se trata de diseñar un filtro pasabajas y otro pasaaltas, tales que:

$$T_{LP}(s) = \frac{62832^2}{s^2 + 47953s + 62832^2}; \qquad T_{HP}(s) = \frac{s^2}{s^2 + 47953s + 62832^2}$$

a) El circuito pasabajas es el siguiente:

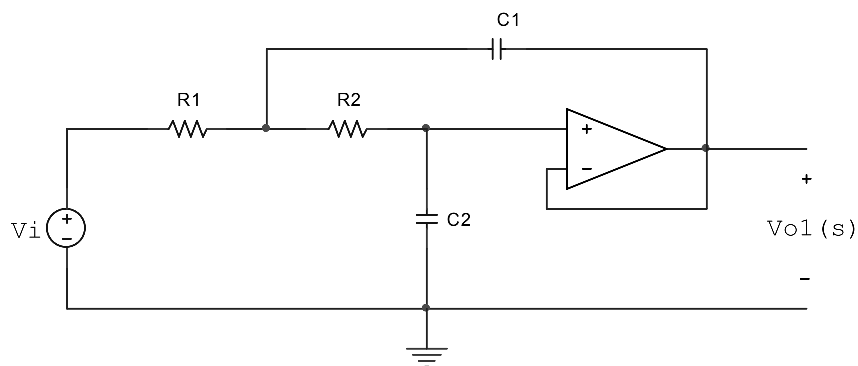

Figura No. 20.

1) $$\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1} = 47953$$

2) $$\frac{1}{R_1R_2C_1C_2} = 62832^2$$

Tomando $R_1 = R_2 = 10k$, resulta:

$C_1 = 4.17nF$; $C_2 = 0.61nF$

b) El circuito pasaaltas es el siguiente:

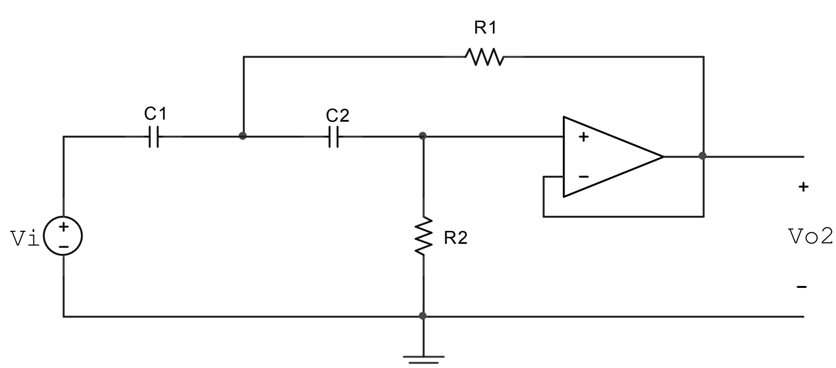

Figura No. 21.

1) $\dfrac{1}{R_2C_2}+\dfrac{1}{R_2C_1}=47953$

2) $\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2}=62832^2$

Tomando : $C_1 = C_2 = 10nF$, tenemos:
$R_2 = 4.17k$, $R_1 = 607k$.

Para sumar las funciones de transferencia, usamos el siguiente circuito:

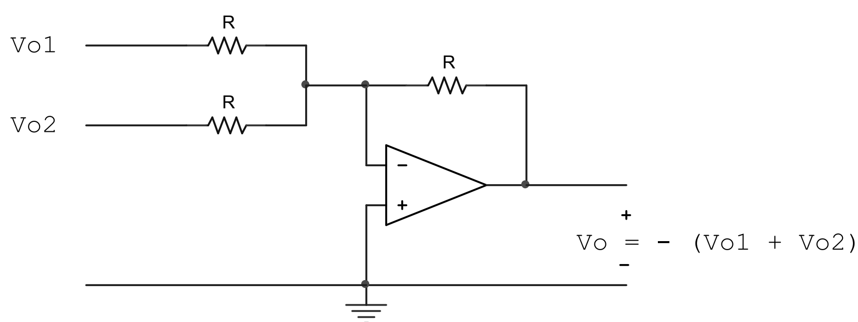

Figura No. 22.

Es posible, entonces, encontrar el circuito definitivo, así:

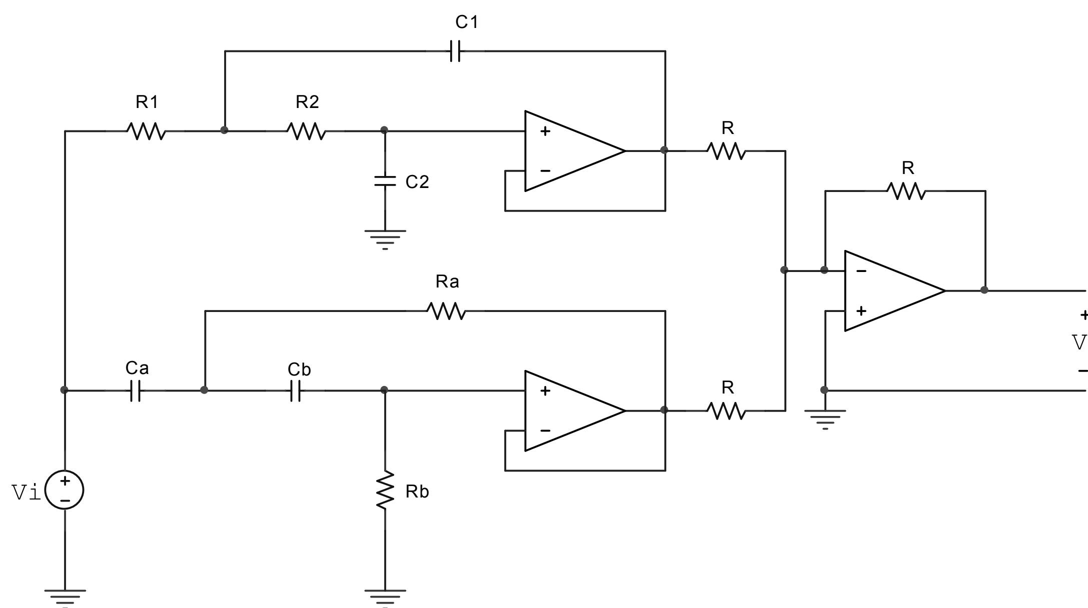

Figura No. 23.

Se toma R=10k, y se procede a la simulación.

Puede observarse que la función de atenuación está dada por:

$$A(s)=\frac{s^2+47953s+62832^2}{s^2+1};\qquad S=\frac{s}{\omega_o};\qquad \omega_o=62832$$

$$A(S)=\frac{S^2+0.7632S+1}{S^2+1}$$

El diagrama de Bode se ilustra a continuación.

ω	A dB
$0.1\omega_o$	0.026
$0.13\omega_o$	0.04
$0.17\omega_o$	0.074
$0.21\omega_o$	0.127
$0.28\omega_o$	0.224
$0.36\omega_o$	0.411

ω	A dB
$0.46\omega_o$	0.806
$0.6\omega_o$	1.79
$0.77\omega_o$	5.02
ω_o	200
$1.1\omega_o$	12.3
$1.4\omega_o$	3.5

ω	A dB
$1.83\omega_o$	1.3
$2.37\omega_o$	0.62
$3\omega_o$	0.32
$4\omega_o$	0.18
$5\omega_o$	0.10

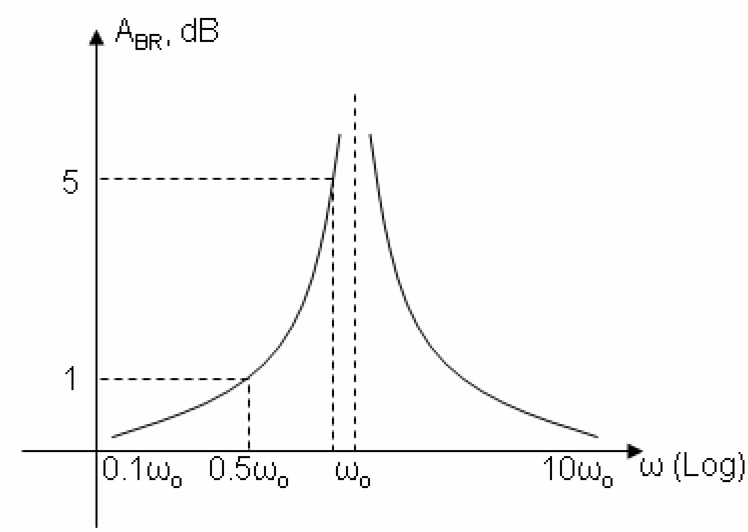

Figura No. 24.

Una estructura bastante conocida para realizar directamente una función rechazabanda es la que se ilustra a continuación.

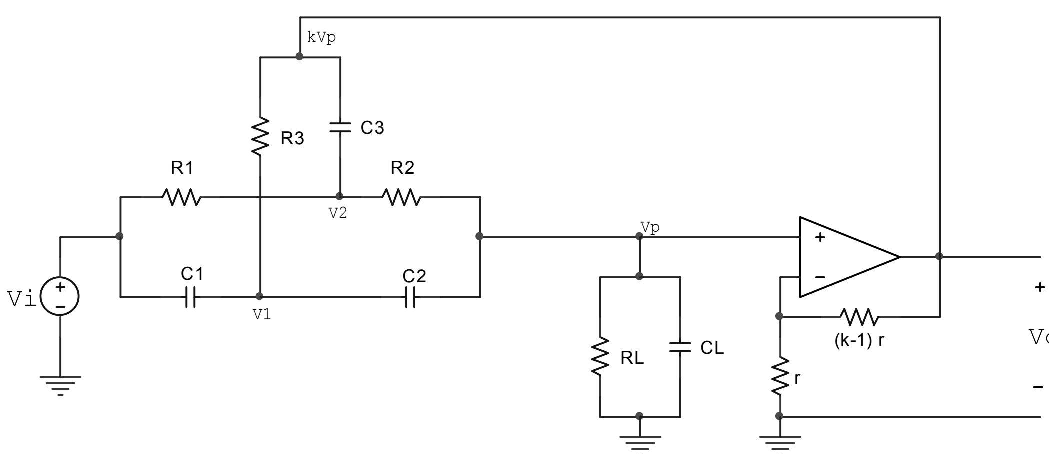

Figura No. 25.

Para encontrar la función de atenuación, analizamos el circuito, veamos: $V_p = \frac{V_o}{k}$

Planteamos las ecuaciones de nodo:

1) $C_1 s(V_i - V_1) = \frac{V_1 - kV_p}{R_3} + C_2 s(V_1 - V_p)$

2) $\frac{V_i - V_2}{R_1} = \frac{V_2 - V_p}{R_2} + C_3 s(V_2 - kV_p)$

3) $\frac{V_2 - V_p}{R_2} + C_2 s(V_1 - V_p) = \frac{V_p}{Z_L}$

Organizando el sistema, tenemos:

1) $\left(C_1 s + C_2 s + \frac{1}{R_3}\right)V_1 - \left(\frac{k}{R_3} + C_2 s\right)V_p = C_1 s V_i$

2) $\left(C_3 s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_2 - \left(\frac{1}{R_2} + kC_3 s\right)V_p = \frac{V_i}{R_1}$

3) $C_2 s V_1 + \left(\frac{1}{R_2}\right)V_2 - \left(C_2 s + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{R_2}\right)V_p = 0$

Tomemos los datos:

$C_1 = C; \quad C_2 = \frac{C}{\alpha}; \quad C_3 = C + \frac{C}{\alpha}$

$R_1 = R; \quad R_2 = \alpha R; \quad R_3 = \frac{\alpha R}{\alpha + 1}$

El sistema queda de la siguiente forma:

1) $[(\alpha+1)RCs + \alpha + 1]V_1 - (RCs + k(\alpha+1))V_p = \alpha RCsV_i$

2) $[(\alpha+1)RCs + \alpha + 1]V_2 - [kRC(\alpha+1)s + 1]V_p = \alpha V_i$

3) $RCsV_1 + V_2 - \left(RCs + \frac{\alpha R}{Z_L} + 1\right)V_p = 0$

$$Z_L = \frac{1}{\frac{1}{R_L} + C_L s} = \frac{R_L}{1 + R_L C_L s}$$

La tercera ecuación se puede expresar como:

$$\mathrm{RCsV_1} + \mathrm{V_2} - \left[\left(\mathrm{C} + \alpha \mathrm{C_L}\right)\mathrm{Rs} + \frac{\alpha \mathrm{R}}{\mathrm{R_L}} + 1\right]\mathrm{V_P} = 0$$

El determinante del sistema es el siguiente:

$$\Delta(\mathrm{s}) = \begin{vmatrix} [(\alpha+1)\mathrm{RCs} + \alpha + 1] & 0 & -(\mathrm{RCs} + \mathrm{k}(\alpha+1)) \\ 0 & [(\alpha+1)\mathrm{RCs} + \alpha + 1] & -[\mathrm{kRC}(\alpha+1)\mathrm{s} + 1] \\ \mathrm{RCs} & 1 & -\left[\left(\mathrm{C} + \alpha \mathrm{C_L}\right)\mathrm{Rs} + \frac{\alpha \mathrm{R}}{\mathrm{R_L}} + 1\right] \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante tenemos:

$$\Delta(\mathrm{s}) = (\alpha + 1)\left[\mathrm{as}^3 + \mathrm{bs}^2 + \mathrm{cs} + \mathrm{d}\right]$$

donde:

$$\mathrm{a} = \mathrm{R}^3\mathrm{C}^3\left[1 - \frac{(\alpha+1)\left(\mathrm{C} + \alpha \mathrm{C_L}\right)}{\mathrm{C}}\right]$$

$$\mathrm{b} = \mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\left[1 + (\alpha+1)\left(2\mathrm{k} - \alpha\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R_L}} - 2 - 2\frac{\mathrm{C_L}}{\mathrm{C}}\right)\right]$$

$$\mathrm{c} = \left[1 - \alpha(\alpha+1)\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R_L}}\right]$$

$$\Delta \mathrm{V_P} = \begin{vmatrix} [(\alpha+1)(\mathrm{RCs}+1)] & 0 & \alpha \mathrm{RCsV_i} \\ 0 & (\alpha+1)(\mathrm{RCs}+1) & \alpha \mathrm{V_i} \\ \mathrm{RCs} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta \mathrm{V_P} = -\alpha(\alpha+1)(\mathrm{RCs}+1)\left(\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\mathrm{s}^2 + 1\right)\mathrm{V_i}$$

Ahora bien, $\mathrm{V_p} = \mathrm{Vo}/\mathrm{k}$

$$\frac{\mathrm{V_o}}{\mathrm{V_i}} = \frac{-\mathrm{k}\alpha(\alpha+1)(\mathrm{RCs}+1)\left(\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\mathrm{s}^2 + 1\right)}{\left(\mathrm{as}^3 + \mathrm{bs}^2 + \mathrm{cs} + \mathrm{d}\right)(\alpha+1)}$$

Debe cumplirse que $\mathrm{s} = -1/\mathrm{RC}$ es un polo de la función de transferencia, esto es, raíz del denominador.

$$\frac{V_o}{V_i}=\frac{-k\alpha(\alpha+1)(RCs+1)(R^2C^2s^2+1)}{\alpha(RCs+1)(R^2C^2s^2+Bs+1)(\alpha+1)}$$

cuando, k = 1, $C_1 = C$, $R_1 = R$, resulta $\alpha = 1$, en consecuencia tenemos:

$$\frac{V_o}{V_i}=\frac{R^2C^2s^2+1}{3R^2C^2s^2+2RCs+1}=\frac{1+s^2/\omega_o^{\,2}}{1+2\xi\left(s/\omega_o\sqrt{3}\right)+\left(s/\omega_o\sqrt{3}\right)^2}:\qquad 2\xi=2\sqrt{3}$$

El diagrama de Bode de atenuación es:

ω/ω_o	A dB
0.1	0
0.126	0
0.158	+0.02
0.2	+0.06
0.25	+0.15
0.316	+0.41
0.398	+1.08
0.5	+2.79
0.63	+6.53
0.79	+13.86
1	+49

ω/ω_o	A dB
1.126	17.8
1.58	13.6
2	11.84
2.5	10.9
3.16	10.36
3.98	10.05
5	9.86
6.3	9.74
7.94	9.66
10	9.62

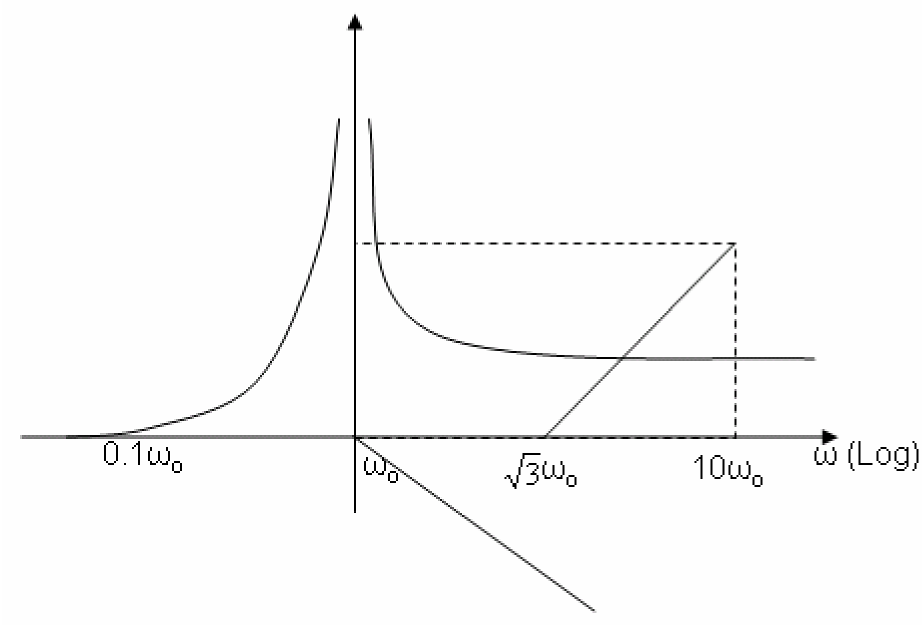

Figura No. 26.

En la práctica se busca una característica de la forma:

$$A(s)=\frac{s^2+Bs+\omega_o^{\,2}}{s^2+\omega_o^{\,2}}$$